Université Cadi Ayyad
Faculté Polydisciplinaire
Département de Physique
Safi

Année universitaire : 2018/2019
Filière : SMPC – SMIA (S2)

Epreuve d'Electricité 1
Durée 1h30min

Exercice 1 (4 pts)

Soit une spire circulaire de centre O, d'axe OZ et de rayon R porte une charge positive Q répartie uniformément avec une densité linéique de charge λ.

Soit M un point de l'axe OZ tel que OM = z. (Figure 1)

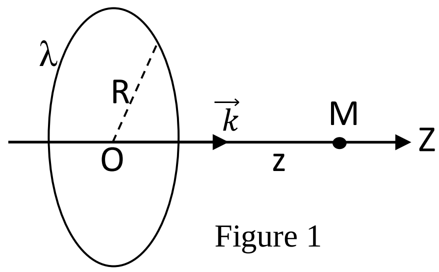


Figure 1

1- Montrer que le champ électrostatique $\vec{E}$(M), créé par la spire chargée au point M, est porté par l'axe OZ de vecteur unitaire $\vec{k}$.
2- Déterminer l'expression du champ $\vec{E}$(M), créé par la spire au point M, en fonction de Q, R, ε_0, z et $\vec{k}$.
3- Déterminer l'expression du potentiel électrostatique V(M) créé par la spire au point M. (on choisira V(∞) = 0).

Exercice 2 (5 pts)

1- On considère un fil infini chargé uniformément avec une densité de charge linéique $\lambda_1 > 0$. Ce fil est porté par l'axe vertical Oz du repère Oxyz. On considère un point M du plan xOy tel que la distance OM = r et l'angle $(\overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{OM}) = \alpha$. (figure2-a)

Déterminer, dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, en utilisant le théorème de Gauss et en justifiant les étapes, l'expression du champ électrostatique $\vec{E}$(M), crée par le fil au point M, en fonction de λ_1, r et α.

2- On considère le système de la figure2-b. Il est formé du fil infini chargé précédent et d'un fil AB de longueur 2L chargé uniformément avec $\lambda_2 > 0$ et disposé par rapport au fil infini comme indiqué sur la figure1-b : AB est parallèle à l'axe Ox, rencontre l'axe Oy au point H tel que
HA = HB = L et OH = a.

Soit M un point quelconque de AB tel que $(\overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{OM}) = \alpha$. (figure2-b)

a- Déterminer, dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, l'expression de la force élémentaire $\overrightarrow{dF}$ exercée par le fil infini sur un élément dl (centré en M) du fil AB, en fonction de la seule variable $\boldsymbol{\alpha}$.

b- En déduire la force $\vec{F}$ exercée sur tout le fil AB en fonction de λ_1, λ_2, L et a.

c- Que devient $\vec{F}$ si le fil AB est infini ?

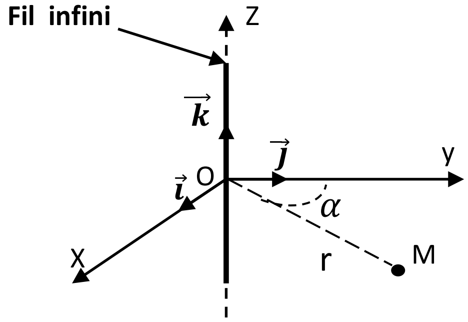


Figure2-a

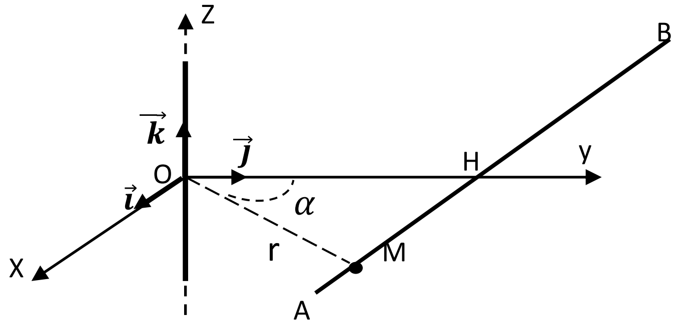


Figure2-b

Exercice 3 (6 pts)

On considère un condensateur sphérique formé par deux conducteurs sphériques concentriques (A) et (B) en équilibre électrostatique. Le conducteur (A), de rayon R_1 est porté au potentiel $V_1 > 0$. Le conducteur (B) creux, de rayon interne R_2 et externe R_3 ($R_1<R_2<R_3$), est mis au sol. (Figure 3)
On désigne par Q_1, Q_2 et Q_3 les charges que portent respectivement les surfaces S_1 de (A) et les surfaces internes (S_{2int}) et externe (S_{2ext}) de (B).

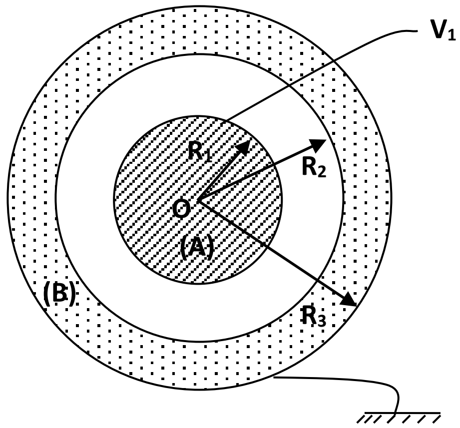


Figure 3

1. a) Rappeler les propriétés d'un conducteur en équilibre.
   b) L'influence électrostatique entre (A) et (B) est elle totale ou partielle ? Justifier votre réponse.
   c) Exprimer Q_2 en fonction de Q_1, et exprimer σ_2 en fonction de σ_1.
   d) Quel est le potentiel V_2 de (B) ?
   e) Que vaut la charge Q_3 ? Justifier.

2. Sachant que le potentiel V(O) au centre d'une distribution sphérique uniforme de charge totale Q et de rayon R est : $V(O) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$
   a) Déterminer le potentiel V_1 du conducteur (A) en fonction de Q_1, R_1 et R_2.
   b) En déduire la capacité C de ce condensateur sphérique.
   c) Déterminer l'expression de l'énergie électrostatique W emmagasinée dans ce condensateur.
3. a) Déterminer le champ $\vec{E}(r)$ entre les armatures (A) et (B) du condensateur sphérique ($R_1<r<R_2$).
   b) Exprimer la densité d'énergie $\omega = \dfrac{dW}{d\tau}$
   c) Retrouver à partir de l'expression de ω, l'énergie W emmagasinée dans le condensateur sphérique.

Exercice 4 (5 pts)

Considérons le circuit de la figure 4.

1- Décrire ce montage, en indiquant le nombre de branches, de nœuds et de mailles indépendantes.
2- En appliquant les lois de Kirchhoff, déterminer les expressions des courants I' et I''.
3- On place une résistance R entre les points A et B (figure 5). On veut déterminer le courant I qui circule à travers cette résistance R (branche AB) en appliquant le théorème de Thévenin.
   a- Déterminer l'expression et la valeur de $E_{th} = (V_A - V_B)$ à vide.
   b- Déterminer l'expression et la valeur de la résistance R_{th}.
   c- En déduire l'expression et la valeur du courant I qui circule dans la branche AB.

On donne : R=0.5 Ω , R_1=2 Ω , R_2=3 Ω , E_1=2 V , E_2=4 V et E=6 V

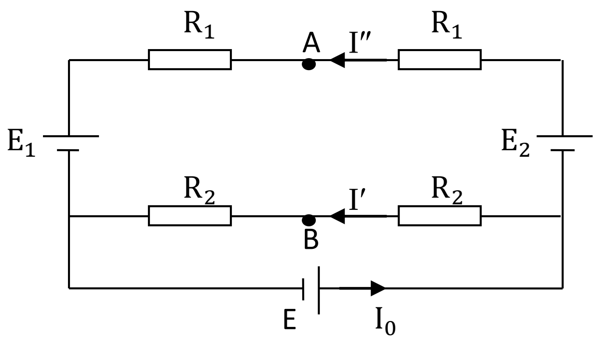


Figure 4

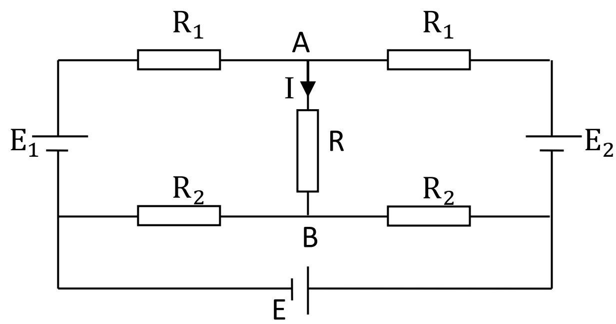


Figure 5

Corrigé de l'Epreuve (2019) d'Electricité 1 (SMPC-SMIA)

Exercice 1

1°- Tout plan contenant $M (\in Oz)$ et perpendiculaire au plan de la spire chargée est un plan de symétrie de la distribution

$\Rightarrow \vec{E}(M) \in$ à ce plan de symétrie

L'axe Oz est l'intersection de tous ces plans de symétrie

$\Rightarrow \vec{E}(M)$ est porté par Oz $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{E}(M) = E(M)\vec{k}}$

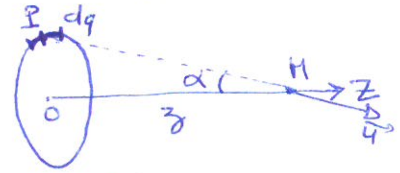
(1)

<u>Ou bien</u>

Oz est un axe de symétrie de la distribution de charge ; donc aussi du champ électrique, donc $\vec{E}(M)$ a la direction de cet axe.

2°/- Une charge $dq(P)$ crée, au point M le champ électrostatique

$$d\vec{E}(M) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 PM^2}\vec{u}$$



Seule la composante dE_z contribue dans le calcul du champ total $\vec{E}(M)$

$$d\vec{E}(M).\vec{k} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 PM^2}\cos\alpha$$

avec $PM^2 = R^2 + z^2$ et $\cos\alpha = \frac{z}{PM} = \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}$

$$E_z = \int_{distrib} \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 PM^2}\cos\alpha = \frac{z}{4\pi\varepsilon_0 (R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\int_{distr} dq$$

(1,5)

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{Q\,z}{4\pi\varepsilon_0 (R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{k}}$$

3°/

$$V(M) = \int_{distri} dV = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 PM} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (R^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

(1,5)

/5

<u>Remarque</u> : on peut calculer $V(M)$ à partir de la relation

$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}\, V \Rightarrow E_z = -\frac{dV}{dz}$ et on trouve :

$$V(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (R^2+z^2)^{1/2}}$$; sachant que $V(\infty) = 0$

Exercice 2

1°/ * Théorème de Gauss :

- choix du système de coordonnés : le point M du plan xoy st repéré par ses coordonnés cylindriques dans le repère $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$

0,5
- La distribution de charge st laissée invariante par rotation d'angle φ autour de oz : $\vec{E}(M) = \vec{E}(r, z)$
- La distribution de charge st laissée invariante par translation selon oz : $\vec{E}(M) = \vec{E}(r)$

0,5
- Le plan passant par M et $\perp$ à oz : $(M, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$ st un plan de symetrie de la distribution : $\vec{E}(M) \in (M, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$
- Le plan passant par M et contenant oz st un plan de symétrie de la distribution : $\vec{E}(M) \in (M, \vec{e}_\rho, \vec{k})$

Donc $\boxed{\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{e}_\rho}$

- On peut prendre comme surface de Gauss, la surface d'un cylindre d'axe oz passant par M et de hauteur h :

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint_{\substack{\text{surface}\\ \text{latérale}}} E\, dS + \iint_{\substack{\text{surfaces de}\\ \text{bases}}} E\, dS = \iint_{S,\text{latérale}} E\, dS$$

$$= E\, 2\pi r h = \frac{\lambda_1 h}{\varepsilon_0} \quad ; \quad \lambda_2 > 0$$

1,5 $$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(M) = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_\rho = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 r}\left[\sin\alpha\, \vec{i} + \cos\alpha\, \vec{j}\right]}$$

2°/ a) - un élément $dl(M)$ autour de M contient la charge $dq = \lambda_2\, dl$ cette charge se trouve dans $\vec{E}(M)$ subit :

2/5

$$d\vec{F} = \lambda_2\, dl\, \vec{E} = \lambda_2\, dx_M\, \vec{E}$$

$tg\,\alpha = \frac{x_M}{a} \Rightarrow a\, tg\,\alpha = x_M \Rightarrow dx_M = \frac{a}{\cos^2\alpha}\, d\alpha$ et $\cos\alpha = \frac{a}{r}$

d'où $d\vec{F} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\cos\alpha}{a} \frac{a}{\cos^2\alpha}\, d\alpha \left[\sin\alpha\, \vec{i} + \cos\alpha\, \vec{j}\right]$

(1)

$$\boxed{d\vec{F} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\, d\alpha\, \vec{i} + \frac{\lambda_1\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0}\, d\alpha\, \vec{j}}$$

b)- $\vec{F} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0}\left[-\ln(\cos\alpha)\right]_{-\alpha_m}^{\alpha_m} \vec{i} + \frac{\lambda_1\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0}\left[\alpha\right]_{-\alpha_m}^{\alpha_m} \vec{j}$

avec $\alpha_m = Arctg\left(\frac{L}{a}\right)$

(1) d'où $\boxed{\vec{F} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\pi\varepsilon_0} Arctg\left(\frac{L}{a}\right) \vec{j}}$

c)- $\vec{F}$ pour $L \to \infty$: fil AB infini : $\alpha_m = \frac{\pi}{2}$

(0,5) $\boxed{\vec{F} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2\varepsilon_0} \vec{j}}$

Exercice 3 :

1°/ a)- Propriétés d'un conducteur en équilibre :

* Le champ électrique à l'intérieur du conducteur est nul ($\vec{E}_{int} = \vec{0}$)
* Le potentiel du conducteur est constante ($V = cst$)
* La charge du conducteur, si elle existe, est surfacique ($\rho = 0$)

(0,5)

b)- L'influence électrostatique entre A et la surface interne de B est totale. (0,5) car B entoure complètement A, où toutes les lignes de champ issues de A aboutissent sur B interne.

c)- $\boxed{Q_2 = -Q_1}$ (0,25) et $\boxed{\sigma_2 = -\frac{R_1^2}{R_2^2}\sigma_1}$ (0,25)

(0,5) d)- $V_2 = 0$

(0,5) e)- $Q_3 = 0$; les charges sur B externe sont neutralisées par les charges <0 de la terre.

3/5

2°/ 0,5 a)- $V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon R_2} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$

0,5 b)- $Q_1 = C\,\Delta V = C(V_1 - V_2) = CV_1 \Longrightarrow C = \frac{4\pi\varepsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}$

0,5 c)- $W = \frac{1}{2} C V_1^2 = \frac{1}{2}\frac{4\pi\varepsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1} V_1^2$ ou $W = \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C}$

3°/

a) Th de Gauss appliqué à une surface fermée de rayon r

0,5 $R_1 < r < R_2$ donne : $\vec{E} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{e}_r}{r^2} = \frac{C V_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{e}_r}{r^2}$

0,5 b) $w = \frac{dW}{d\tau} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{Q_1^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2 r^4} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{C^2 V_1^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2 r^4}$

c) $W = \iiint_{\text{Volume où } E \neq 0} w\, d\tau$

1 $= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_{R_1}^{R_2} r^2\, \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{C^2 V_1^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2 r^4}\, dr$

$= \frac{1}{2}\cdot(4\pi\varepsilon_0)\frac{C^2V_1^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2}4\pi\varepsilon_0\frac{C^2V_1^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$

$W = \frac{1}{2} C V_1^2$ avec $\frac{1}{C} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$

Exercice 4 :

1°/ * Nombre de Noeuds : 2
* Nombre de branches : 3
1 * Nombre de mailles indépendantes : $m = b - n + 1 = 3 - 2 + 1 = 2$

2°/ Lois de Kirchhoff : loi des noeuds + Loi des mailles :

donne pour le circuit de la figure 4 :

0,5
$$\begin{cases} E_1 + 2R_1 I'' - E_2 - 2R_2 I' = 0 \\ 2R_2 I' - E = 0 \\ I' + I'' - I_0 = 0 \end{cases}$$
0,5

* $E = 2R_2 I' \Longrightarrow \boxed{I' = \frac{E}{2R_2}}$ 0,5

* $E_2 + E - E_1 = 2R_1 I'' \Longrightarrow \boxed{I'' = \frac{E_2 + E - E_1}{2R_1}}$ 0,5

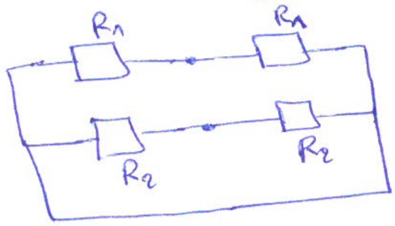
4/5

3°/ a) on enlève la résistance R et on retrouve le circuit de la figure 4.

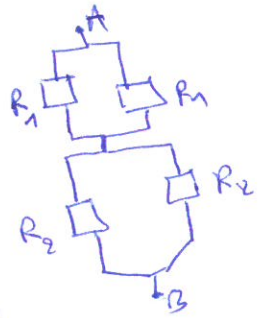
$$E_{Th} = V_A - V_B\Big|_{\text{à vide}} = -R_1 I'' + E_2 + R_2 I' = -\frac{(E_2+E-E_1)}{2} + E_2 + \frac{E}{2}$$

0,5 $\Rightarrow \boxed{E_{Th} = \dfrac{E_1+E_2}{2}}$ AN : $\boxed{E_{Th} = 3V}$ 0,25

b) -



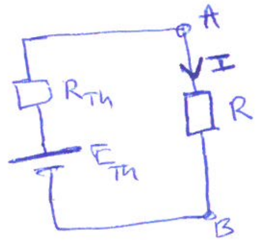
$\equiv$



$$R_{Th} = (R_1 \,||\, R_1) + (R_2 \,||\, R_2)$$

0,5 $\boxed{R_{Th} = \dfrac{R_1+R_2}{2}}$ A.N $\boxed{R_{Th} = 2{,}5\,\Omega}$ 0,25

c) - on ramenant R entre AB



$$\Rightarrow I = \frac{E_{Th}}{R + R_{Th}}$$

$$I = \frac{\frac{E_1+E_2}{2}}{R + \frac{R_1+R_2}{2}}$$

0,25 $\Rightarrow \boxed{I = \dfrac{E_1+E_2}{2R+R_1+R_2}}$; AN : $\boxed{I = \dfrac{2+4}{1+2+3} = 1A}$

0,25

5/5