

Simulation numérique d'équation d'iconale à 3D

m. elouardi

NOMENCLATURE

g : Accélération de la pesanteur, $m.s^{-2}$

K : Constante de Gladstone-Dale, m^3/kg

l : Position de l'écran d'observation, m

M : Masse molaire, $kg.mole^{-1}$

n : Indice de réfraction du milieu

P : Pression, Pa

r, z Coordonnées cylindriques, m

δ Epaisseur de la couche limite, mm

λ Conductivité thermique, $W.m^{-1}.K^{-1}$

C_p Chaleur spécifique à pression constante, $J.kg^{-1}.K^{-1}$

R Constante des gaz parfaits = $8.314 J.mole^{-1}.K^{-1}$

R_D Rayon du disque = $19.75 mm$

s Abscisse curviligne

\vec{s} Vecteur position

T Température du gaz, K

T_D Température du disque = $420 ^\circ C$

V_r Vitesse radiale, $m.s^{-1}$

V_z Vitesse radiale, $m.s^{-1}$

μ : Viscosité dynamique, $kg.m^{-1}.s^{-1}$

ρ Masse volumique, $kg.m^{-3}$

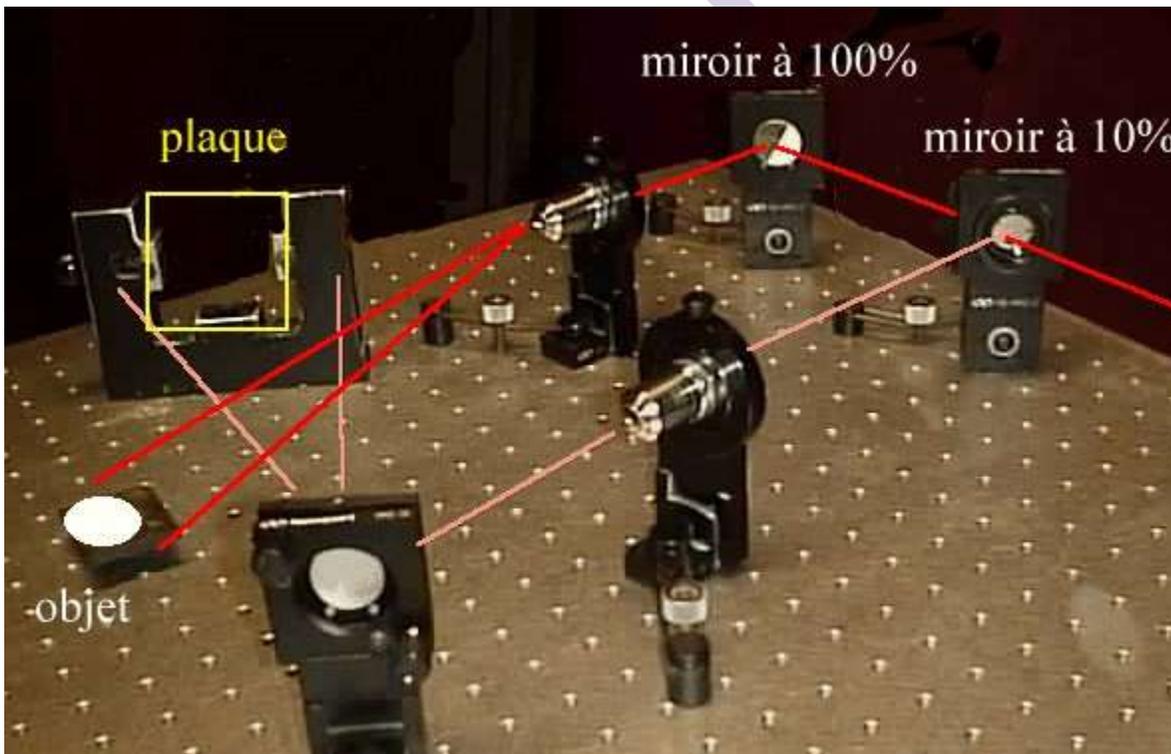
I/GENERALITES : METROLOGIE THERMIQUE

Holographie: rappels théoriques

- 1 Le processus holographique élémentaire consiste à superposer à une onde de référence, des ondes diffusées par un objet éclairé par une lumière cohérente.
- 2 Les sources lumineuses utilisées sont des lasers ; en effet il faut disposer de sources lumineuses ayant une cohérence spatiale et temporelle suffisante permettant d'obtenir de façon correcte les interférences résultant de la superposition de l'onde de référence et des ondes diffusées par les différents points d'un même objet. Le résultat de cette superposition est alors enregistré sur une plaque photographique, c'est un **hologramme**.

Holographie: matériel expérimental

- 2 - Schéma du montage vu du dessus.



- 1 L'objet est placé de telle sorte que la partie visible se retrouve au niveau des croix sur le

schéma.

- 2 La lame séparatrice BS (5 %) divise le faisceau laser en un faisceau de référence et un faisceau "objet".
- 3 Le miroir M1 est placé de telle sorte que le faisceau laser éclaire l'objet avec le maximum d'intensité.
- 4 Le faisceau réfléchi par M2 doit aller frapper le centre du porte plaque holographique.
- 5 L'objectif L1 élargit le faisceau frappant l'objet.
- 6 L'objectif L2 élargit le faisceau de référence.

Métrologie thermique /contexte

Les activités dans le domaine de la métrologie thermique consistent principalement à la détermination des propriétés thermophysiques des matériaux homogènes classiques (diffusivité thermique, capacité calorifique, conductivité thermique, ...) et d'interfaces mais aussi en la caractérisation de matériaux plus complexes (matériaux semi-transparents, matériaux composites, bicouches ou multi-couches, ...), dédiés à des applications spécifiques dans des conditions de fonctionnement particulières (basse et haute températures).

Les matériaux de nouvelles générations hétérogènes et anisotropes nécessitent ainsi un travail préalable de modélisation de leur comportement thermique afin de définir :

- 1 Les propriétés directement accessibles à la mesure
- 2 La meilleure façon de les estimer
- 3 Caractérisation de matériaux d'isolation pour le bâtiment
- 4 Caractérisation de matériaux bicouche et multicouches
- 5 Mesure de résistance de contact et d'interface (collage, brasure et dépôts sous-vide)
- 6 Détermination de résistances thermiques de contact dans les moteurs
- 7 Contrôle non destructif par thermographie infrarouge
- 8 Dimensionnement d'échangeurs en électronique de puissance

II/ simulation et visualisation de la couche limite thermique au-dessous d'un cylindre

La simulation numérique et la visualisation de la couche limite thermique au voisinage d'un cylindre en convection libre dans l'air. En effet le modèle est fondé sur la résolution des équations de Navier-Stokes couplées à l'équation de l'énergie pour décrire l'écoulement et le transfert de chaleur. En utilisant la technique des volumes finis pour résoudre numériquement les équations. On simule ainsi le champ de température et les lignes de courant dans le milieu. Les résultats mettent en évidence la présence de forts gradients de température entraînant l'établissement d'une mince couche limite thermique localisée près du disque. La visualisation de cette couche a été effectuée par la technique optique d'ombroscopie. Une approche numérique a été suggérée pour expliquer la caustique de la couche limite thermique qui joue le rôle d'une lentille thermique.

II-1/ Introduction

Dans le domaine de la modélisation des transferts thermiques entre une paroi et un fluide, la connaissance des caractéristiques de la couche limite thermique et de la répartition de température est une étape fondamentale afin de tester la validation des modèles numériques.

Cependant, une telle expérimentation n'est pas simple en général. En effet, il s'agit de mesurer des grandeurs locales dans un écoulement convectif sensible aux perturbations extérieures. Cette contrainte exclut les techniques de contact consistant à introduire un capteur thermique dans le fluide et favorise l'emploi des méthodes de contrôle non destructif (NDT).

Dans ce contexte, les techniques optiques constituent les outils les plus utilisés en mécanique des fluides anisotropes. Leur avantage majeur réside dans le fait qu'elles rendent certaines propriétés du champ d'écoulement directement accessibles à la perception visuelle sans aucune perturbation du milieu. Le principe de cette métrologie consiste à quantifier les modifications que subit une onde électromagnétique lors de sa traversée de l'écoulement soumis à l'observation.

Les techniques d'interférométrie, qui mettent en évidence les variations de la phase de l'onde, ne sont pas directes car on doit effectuer tout un ensemble de traitements numériques complexes qui conditionnent la précision de la mesure .

En comparaison avec l'interférométrie, la technique d'ombroscopie qui exploite la déviation de la

trajectoire des rayons lumineux par un gradient d'indice de réfraction, constitue le moyen le plus simple à mettre en œuvre pour visualiser la couche limite thermique. Cette méthode considérée jusqu'à maintenant comme étant qualitative, peut être améliorée en exploitant quantitativement l'ensemble de l'information contenue dans l'image du milieu étudié.

L'objectif de ce travail est de présenter une première approche de la simulation de la trajectoire d'un faisceau laser traversant le champ de la température établi au-dessous d'un cylindre maintenu à température constante.

II-2/Etude Expérimentale

a. Dispositif expérimental

L'étude a été réalisée sur un cylindre à axe vertical chauffé dans l'air ambiant (figure 1).

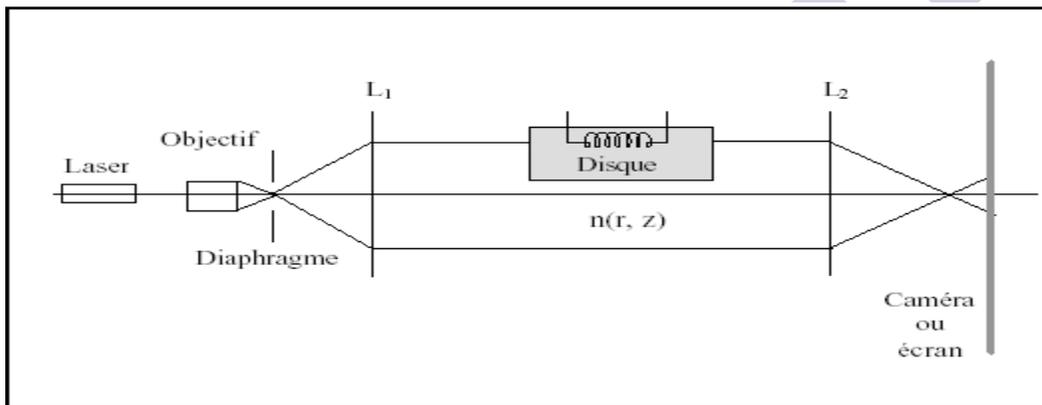


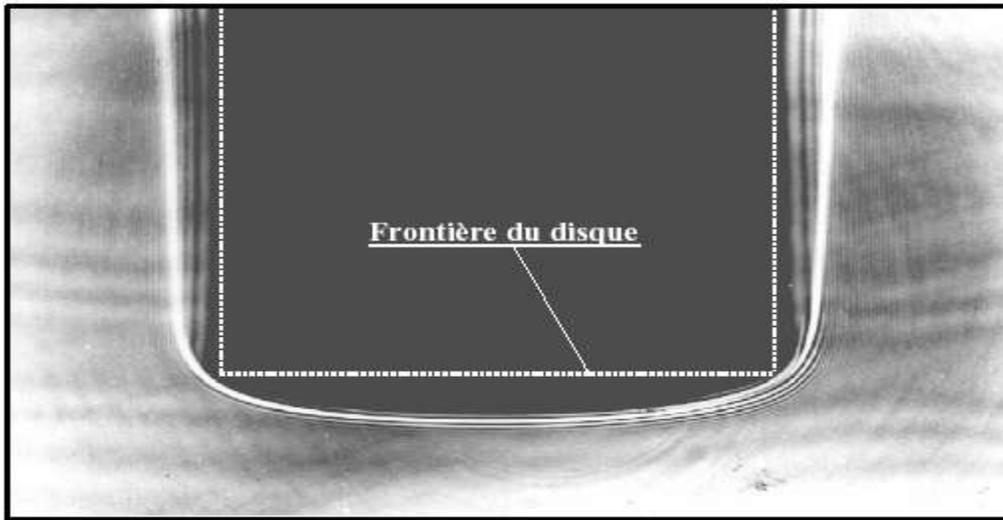
Fig. 1. Schéma de principe du montage optique de la technique de l'ombroscopie

C'est un cylindre en aluminium de rayon ($RD = 19.75$ mm), dans lequel est noyée une résistance électrique de telle manière à le porter à une température uniforme de 420 °C. Les courants de convection libre induisent l'établissement d'une couche d'air chaud au voisinage du cylindre. Les gradients de température dans cette couche entraînent des variations de la masse volumique et par conséquent de l'indice de réfraction de l'air. Un faisceau parallèle issu d'une source laser He-Ne de puissance 1 mW traverse le milieu et subit alors des modifications de son chemin optique par l'effet de la réfraction. Un écran placé en aval des rayons émergents permet de visualiser et de déterminer les caractéristiques de la couche limite qui joue le rôle d'une lentille thermique [3].

b. Résultats expérimentaux

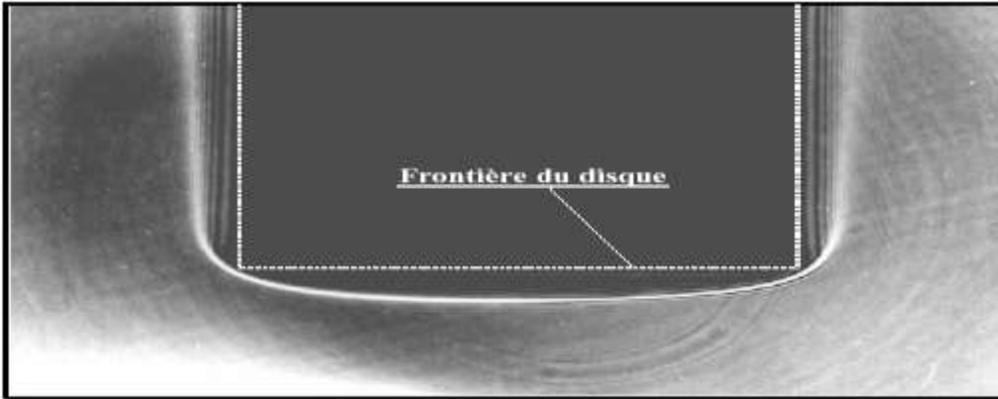
Les figures 2 et 3 représentent l'ombre portée du disque sur l'écran placé respectivement à deux distances différentes ($l = 1.71 \text{ m}$ et $l = 2.48 \text{ m}$). Ces photographies illustrent la concentration de la lumière sous la forme d'une mince bande lumineuse entourant le disque.

Ce phénomène optique est dû aux effets de la réfraction sur les rayons lumineux et permet de matérialiser la frontière de la couche limite thermique. Il faut signaler que cette bande n'apparaît d'une façon nette que pour une position de l'écran dans un intervalle déterminé. On peut faire une analogie de ce système avec une lentille astigmatique dont l'indice de réfraction est plus faible que le fluide environnant. L'enveloppe des rayons traversant cette couche limite forme la caustique de la lentille thermique.



Photographie de l'objet porté à la température de $420 \text{ }^\circ\text{C}$, $l = 1.71 \text{ m}$

En outre, les photos des figures 2 et 3 révèlent la présence des franges d'interférence qui sont très serrées et localisées. Elles sont le résultat des intersections des rayons lumineux émergents du milieu avec des différences de marche. En comparaison avec des travaux publiés dans ce domaine [2, 3], l'utilisation d'une source cohérente a rendu ce phénomène d'interférence visible avec un bon contraste.



Photographie de l'objet porté à la température de 420 °C, $l = 2.48$ m

II-3/ Simulation numérique

a/ Equations du modèle

Pour comprendre les phénomènes optiques mis en évidence expérimentalement (figure 2) et justifier l'existence d'une caustique des rayons émergents de la couche limite thermique, il est nécessaire de connaître la distribution de l'indice de réfraction dans le milieu. Cette grandeur est liée à la température de l'air par la relation de Gladstone-Dale [1].

La première étape de cette approche consiste à simuler les écoulements et le champ de température dans l'air voisinant le disque. Nous avons mis au point un modèle numérique fondé sur la résolution des équations de Navier-Stokes et du transfert de chaleur. Dans les hypothèses d'un écoulement axisymétrique, laminaire, incompressible en régime établi, ces équations s'écrivent de la manière suivante :

- Equation de continuité

$$\text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad (1)$$

- Equation de mouvement

$$\rho(\vec{V} \cdot \text{grad}) \vec{V} = - \text{grad} P - \text{div}(\vec{\tau}) - \rho \vec{g} \quad (2)$$

- Equation de l'énergie

$$\rho C_p (\vec{V} \cdot \text{grad}) T = \text{div}(\lambda \text{grad} T) \quad (3)$$

Les propriétés physiques de l'air sont considérées variables avec la température selon des expressions facilitant le calcul numérique (tableau 1).

Tableau 1 : Variation des propriétés thermophysiques de l'air en fonction de la température

Masse volumique Kg.mol^{-1}	Viscosité dynamique $\text{Kg.m}^{-1}\text{s}^{-1}$	Conductivité thermique $\text{W.m}^{-1}\text{K}^{-1}$	Capacité calorifique à pression constante $(\text{J.kg}^{-1}\text{K}^{-1})$
$\rho(T) = \frac{PM}{RT}$	$\mu(T) = 1.875 \times 10^{-5} \left(\frac{T}{293}\right)^{0.6386}$	$\lambda(T) = 0.026 \left(\frac{T}{293}\right)^{0.7231}$	$C_p(T) = 975.3 + 0.0368T + 2 \times 10^{-4} T^2$

Les conditions aux limites sont fondées sur la condition d'imperméabilité et du non glissement du fluide au niveau de la paroi du disque. L'hypothèse d'axisymétrie évoquée précédemment impose la parité des fonctions à calculer et permet de restreindre le domaine de calcul à la moitié du disque et son voisinage. Au niveau de la frontière du domaine de calcul, il est difficile de postuler les conditions aérodynamiques en convection libre. Pour remédier à cette indétermination, nous avons considéré un domaine de calcul suffisamment large pour pouvoir supposer que l'air loin du disque est stagnant.

La résolution numérique a été réalisée en utilisant un code de calcul aux volumes finis [6]. Le domaine de calcul est découpé selon un maillage rectangulaire à pas variable (de l'ordre de 0.5 mm) pour s'affranchir des forts gradients de température, en particulier au voisinage du cylindre (figure 4). Les équations du modèle sont mises selon une seule équation de conservation permettant d'effectuer une résolution commune des équations de transfert par intégration sur chaque volume de contrôle [9]. Les systèmes d'équations algébriques résultant du schéma numérique sont résolus itérativement par la technique de Gauss-Seidel.

b. Résultats de la simulation

b.1. Ecoulement et champ de température

Le tracé des lignes de courant de la figure 5 montre la topologie de l'écoulement. La simulation a été réalisée dans les mêmes conditions expérimentales des figures 2 et 3 ($T_D = 420 \text{ °C}$, $P = 1.013 \text{ 105 Pa}$ d'air et $R_D = 19.75 \text{ mm}$). On constate que les lignes de courant se resserrent au voisinage de l'échantillon pour former une couche limite hydrodynamique mettant ainsi en évidence l'existence d'un fort gradient de vitesse dû aux effets de la convection libre.

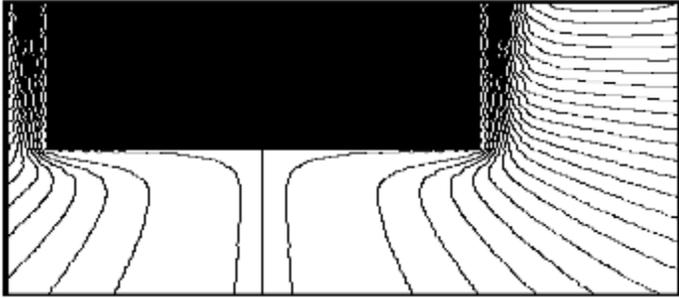


Fig. 5 : Les lignes de courant de l'écoulement autour du cylindre à 420°C



Fig. 6 : Les isothermes autour du cylindre à 420°C de 40 à 400°C avec un pas de 80 °C

La figure 6 représente les isothermes de 40 °C à 400 °C avec un pas de 80°C. Ces valeurs sont localisées très près de l'échantillon illustrant la présence d'un fort gradient de température de l'ordre de 100 °C/mm. On peut considérer en première approximation que l'isotherme 40 °C représente la frontière de la couche limite thermique dont l'épaisseur au centre est de l'ordre de 5 mm (figure7).

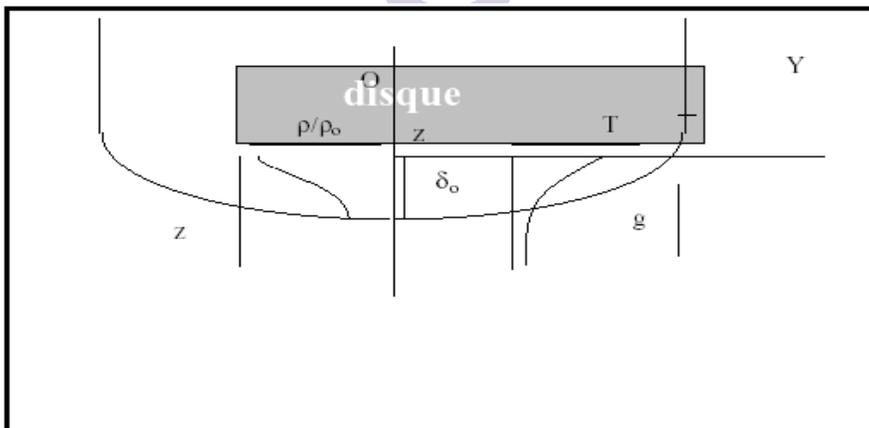


Fig. 7 : Schématisation de la couche limite thermique établie sous le cylindre

Le tracé des distributions de température respectivement radiale et axiale (figures 8 et 9) permet d'évaluer le gradient thermique. Dans ces graphiques, l'origine de l'axe z est prise au centre de la face inférieure du cylindre. On constate que le profil radial est sensiblement constant sous une grande partie du disque ($\gg 80\%$) et décroît rapidement en s'approchant du bord sur une distance de l'ordre de $\llbracket \llbracket \llbracket \gg 5\text{mm}$. Le profile axial $T(r=0, z)$ illustre également une forte décroissance de la température de $400\text{ }^\circ\text{C}$ à $20\text{ }^\circ\text{C}$ sur une distance voisine de 5mm . Ce résultat est en bon accord avec les observations et les mesures réalisées par Chehouani et al. en utilisant l'interférométrie holographique [12].

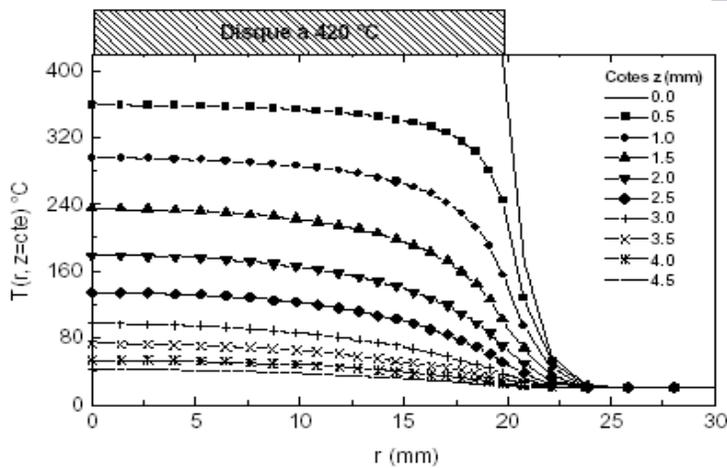


Fig. 8 : Profil radial de la température sous le cylindre pour plusieurs cotes ($z=\text{cst}$)

Etant donnée l'importance de ces gradients de température et donc d'indice de réfraction engendrés par les effets de la convection naturelle, on peut s'attendre à une influence non négligeable de ce phénomène sur la trajectoire des rayons lumineux traversant la couche limite sous le disque.

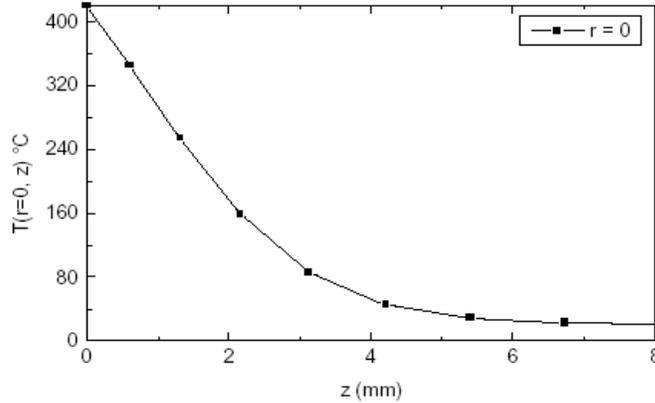


Fig. 9 : Profil axial de la température sous le cylindre pour (r = 0)

b.2. Trajectoire des rayons

A partir du champ de température ainsi simulé on peut déduire la distribution de l'indice de réfraction de l'air en appliquant l'équation de Gladstone -Dale (figure 10) :

$$n(r, z) = 1 + \frac{KPM}{RT(r, z)} \quad (4)$$

avec $K = 0.2256 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 / \text{kg}$, constante de Gladstone -Dale
 $M = 28.810 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mole}$, masse molaire de l'air
 $P = 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ $R = 8.314 \text{ J/mole/K}$

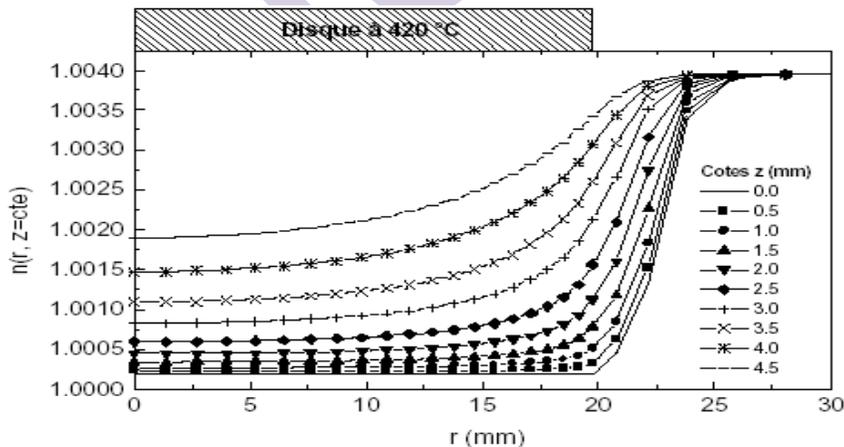


Fig. 10 : Distribution radiale de l'indice de réfraction sous le disque pour plusieurs cotes (z = cst)

Les courbes de la distribution radiale de l'indice de réfraction $n(r, z)$, ont un comportement analogue à celui de la température $T(r, z)$. Les variations d'indice de réfraction sont très accentuées aux

extrémités du disque. On peut s'attendre à ce que les effets de bord soient les plus significatifs sur la déviation des rayons lumineux par la réfraction.

Ainsi pour expliquer qualitativement les observations expérimentales représentées par les clichés des figures 2 et 3, nous avons tracé le profil simulé de la masse volumique et son influence qualitative sur le trajet des rayons lumineux (figure 11). Il faut noter que contrairement au profil axial de température (figure 9), la masse volumique présente un point d'inflexion pour $z = 2.5$ mm. L'éclairement sur l'écran présente alors un maximum donnant lieu à une bande lumineuse définissant l'image de la couche limite thermique.

Si l'on reprend le schéma de la figure 1, les rayons lumineux parallèles formés par la lentille L1 traversent le milieu d'indice variable $n(r, z)$, représenté par la figure 10, et subissent une certaine déviation. La trajectoire de chaque rayon peut être déterminée par la résolution de l'équation de Snell [1, 3] :

$$\frac{d}{ds} \left[n \frac{d\vec{s}}{ds} \right] = \vec{\nabla} n$$

(5)

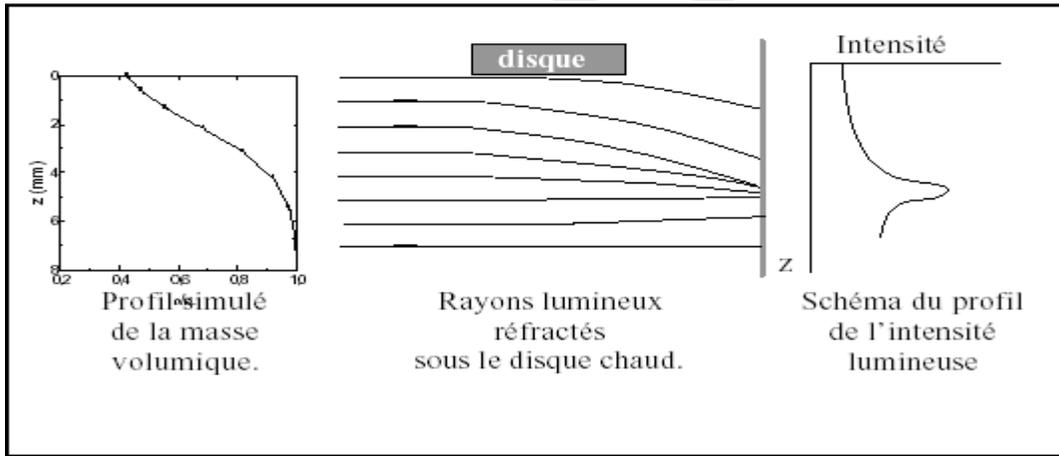


Fig. 11 : Interprétation qualitative du comportement optique de la couche limite thermique

\vec{s} Est le vecteur position d'un point appartenant à un rayon et s désigne son abscisse curviligne (figure 12).

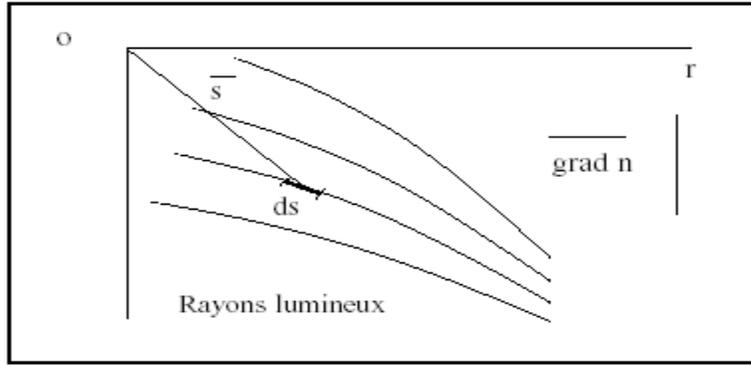


Fig. 12 : Schéma de la déviation des rayons lumineux réfractés dans un milieu à gradient d'indice

Pour un rayon quelconque traversant le champ d'indice $n(r, z)$, l'équation vectorielle (5) doit être décomposée en deux équations différentielles aux dérivés partielles indépendantes déterminant les coordonnées du rayon ($z(r)$, $\varphi(r)$). Par contre, si on considère un rayon qui traverse le plan central (\vec{e}_r, \vec{e}_z), son chemin ne subira aucune variation selon la direction \vec{e}_θ pour des raisons de symétrie comme l'illustre la figure 7a. Ainsi, sa trajectoire peut être calculée uniquement par la résolution d'une seule équation différentielle en fonction de $z(r)$.

Pour éviter toute résolution numérique supplémentaire de l'équation de Snell (5), une autre méthode peut être envisagée en considérant que le rayon lumineux traversera une multitude de dioptres élémentaires, matérialisés par les isothermes (figure 5). Ces dioptres vont dévier sa trajectoire dans le sens des indices de réfraction croissants, c'est à dire vers les températures les moins élevées. Nous pouvons alors appliquer localement pour chaque dioptre la loi de Snell - Descartes :

$$n_i \sin \alpha_i = n_r \sin \alpha_r \quad (6)$$

où α_i et α_r désignent respectivement les angles d'incidence et de réfraction par rapport à la normale qui est la direction de $\vec{\text{grad}} n$ (figure 7b).

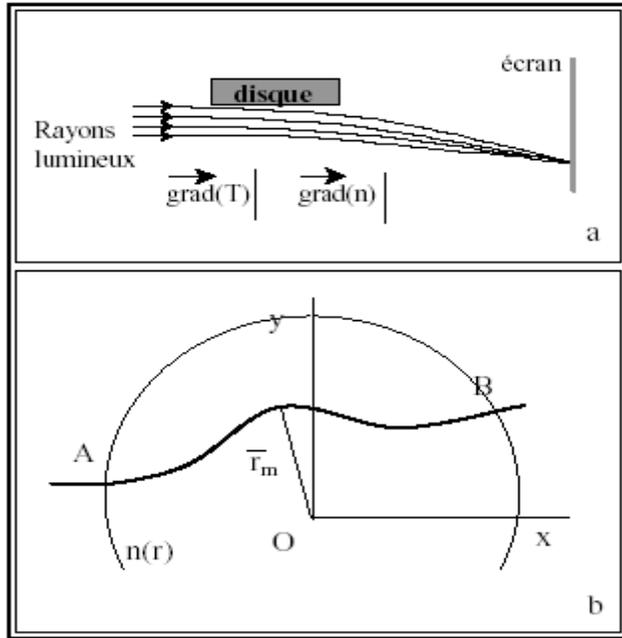


Figure 13. Schéma de la trajectoire des rayons lumineux réfractés sous le disque a/ - gradient d'indice axial- b/ -gradient d'indice radial

III/ DEVELOPPEMENT DE L'EQUATION DE SNELL DANS LES COORDONNEES CYLINDRIQUES

Le champ de la température au dessus du cylindre est sous forme conique :

Donc on'a :

$$0 \leq \rho \leq r$$

$$\frac{r}{l} = \frac{r_0}{L}$$

$$R=0.01975m$$

$$a = r \sin \theta$$

$$\sqrt{r^2 - a^2} = r \cos \theta$$

$$0 \leq z \leq l$$

$$l=0.008m$$

$$0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Soit le vecteur position (voir schéma) :

$$O\vec{M} = O\vec{O} + O\vec{O}_1 + O_1\vec{O}_2 + O_2\vec{O}_3$$

$$O\vec{M} = \vec{S} = -a\vec{e}_y - \left\| O\vec{O}_1 \right\| \vec{e}_x - (l-z)\vec{e}_z + \rho\vec{e}_\rho$$

$$\vec{S} = -a\vec{e}_y - \sqrt{r^2 - a^2} \vec{e}_x - (l-z)\vec{e}_z + \rho\vec{e}_\rho$$

$$\vec{e}_x = \cos \varphi \vec{e}_\rho - \sin \varphi \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{e}_y = \sin \varphi \vec{e}_\rho + \cos \varphi \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{S} = -a(\sin \varphi \vec{e}_\rho + \cos \varphi \vec{e}_\varphi) - \sqrt{r^2 - a^2} (\cos \varphi \vec{e}_\rho - \sin \varphi \vec{e}_\varphi) - (l-z)\vec{e}_z + \rho\vec{e}_\rho$$

Donc ; le vecteur position s'écrit comme suit :

$$\vec{S} = (\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi) \vec{e}_\rho + (\sqrt{r^2 - a^2} \sin \varphi - a \cos \varphi) \vec{e}_\varphi - (l-z)\vec{e}_z$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a * \cos b \mp \sin a * \sin b$$

$$\sin(a \pm b) = \sin a * \cos b \pm \cos a * \sin b$$

$$\mathbf{a = r \sin \theta}$$

$$\sqrt{r^2 - a^2} = r \cos \theta$$

Pour simplifier l'écriture :

$$\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi = \rho - r(\sin \theta \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi) = \rho - r \cos(\theta - \varphi)$$

$$\sqrt{r^2 - a^2} \sin \varphi - a \cos \varphi = r(\cos \theta \sin \varphi - \sin \theta \cos \varphi) = r \sin(\theta - \varphi)$$

$$a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 + a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi) = r(\sin \theta \sin \varphi - \sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi)$$

$$= r[\cos(\theta - \varphi) + \sin(\theta - \varphi)]$$

On pose :

$$X = \frac{\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi}{S} = \frac{\rho - r \cos(\theta - \varphi)}{S}$$

$$Y = \frac{a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)}{\rho S} = \frac{r[\cos(\theta - \varphi) + \sin(\theta - \varphi)]}{\rho S}$$

$$Z = \frac{l - z}{S}$$

$$\vec{S} = [\rho - r \cos(\theta - \varphi)]\vec{e}_\rho + r \sin(\theta - \varphi)\vec{e}_\varphi - (l - z)\vec{e}_z$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(n \frac{\partial \vec{S}}{\partial s} \right) = \vec{\nabla} n$$

: Equation d'ICONALE

Développant cette équation en coordonnées cylindriques.

Soit $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$: Base en coordonnées cylindriques

$(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$: Base en coordonnées cartésiennes

\vec{S} : Vecteur position d'un point appartenant à un rayon lumineux par rapport à l'origine.

S : abscisse curviligne

La norme de \vec{S} est $\|\vec{S}\|$

Approximation S = $\|\vec{S}\|$?

Cette approximation ; car entre la température ambiante jusqu'à 420°C d'après l'expérience la déviation du faisceau laser a un ordre de grandeur de 10^{-3} mm.

$$S = \sqrt{(\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi)^2 + (\sqrt{r^2 - a^2} \sin \varphi - a \cos \varphi)^2 + (l - z)^2}$$

$$S = \sqrt{[\rho - r \cos(\theta - \varphi)]^2 + r^2 \sin^2(\theta - \varphi) + (l - z)^2}$$

$$S^2 = (\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi)^2 + (\sqrt{r^2 - a^2} \sin \varphi - a \cos \varphi)^2 + (l - z)^2$$

$$\left(\frac{\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi}{S}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{r^2 - a^2} \sin \varphi - a \cos \varphi}{S}\right)^2 + \left(\frac{l - z}{S}\right)^2 = 1$$

$$S^2 = [\rho - r \cos(\theta - \varphi)]^2 + r^2 \sin^2(\theta - \varphi) + (l - z)^2$$

$$\frac{\partial \vec{S}}{\partial S}$$

En différentiant $\frac{\partial \vec{S}}{\partial S}$;

$$\frac{\partial \vec{S}}{\partial s} = \frac{\partial \vec{S}}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial s} + \frac{\partial \vec{S}}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial s} + \frac{\partial \vec{S}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s}$$

$$\frac{\partial \vec{S}}{\partial \rho} = \vec{e}_\rho$$

$$\frac{\partial \vec{S}}{\partial \rho} = \frac{\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi}{\sqrt{(\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi)^2 + (\sqrt{r^2 - a^2} \sin \varphi - a \cos \varphi)^2 + (l - z)^2}} = \frac{\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi}{S}$$

$$\frac{\partial \vec{S}}{\partial \rho} = X$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial S} = \frac{S}{\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial S} = \frac{1}{X}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{S}}{\partial \varphi} &= (-a \cos \varphi + \sqrt{r^2 - a^2} \sin \varphi) \vec{e}_\rho + (\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi) \vec{e}_\varphi - (\sqrt{r^2 - a^2} \sin \varphi - a \cos \varphi) \vec{e}_\rho \\ &\quad + (\sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi + a \sin \varphi) \vec{e}_\varphi = \rho \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \vec{S}}{\partial \varphi} = \rho \vec{e}_\varphi$$

$$\frac{\partial \vec{S}}{\partial \varphi} = \frac{1}{2S} [2(-a \cos \varphi + \sqrt{r^2 - a^2} \sin \varphi) + 2(\sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi + a \sin \varphi)] = \frac{1}{S} [(a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)]$$

$$\frac{\partial \vec{S}}{\partial \varphi} = \frac{a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)}{S}$$

$$\frac{\partial \vec{S}}{\partial \varphi} = \rho Y$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial S} = \frac{S}{a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial S} = \frac{1}{\rho Y}$$

$$\frac{\partial S}{\partial z} = \frac{-2(l-z)}{2S} = -\frac{(l-z)}{S}$$

$$\frac{\partial S}{\partial z} = -\frac{l-z}{S} = -Z$$

$$\frac{\partial z}{\partial S} = -\frac{S}{l-z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial S} = -\frac{1}{Z}$$

Donc

$$\frac{\partial \vec{S}}{\partial S} = \frac{S}{\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi} \vec{e}_\rho + \frac{\rho S}{a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)} \vec{e}_\varphi - \frac{S}{l-z} \vec{e}_z$$

$$\frac{\partial \vec{S}}{\partial S} = \frac{1}{X} \vec{e}_\rho + \frac{1}{Y} \vec{e}_\varphi - \frac{1}{Z} \vec{e}_z$$

L'équation **d'ICONALE** peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial S} \left(n \frac{\partial \vec{S}}{\partial S} \right) = \frac{\partial n}{\partial S} * \frac{\partial \vec{S}}{\partial S} + n \frac{\partial^2 \vec{S}}{\partial S^2}$$

En différentiant $\frac{\partial n}{\partial S}$

$$\frac{\partial n}{\partial s} = \frac{\partial n}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial s} + \frac{\partial n}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial s} + \frac{\partial n}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s}$$

$$\frac{\partial n}{\partial s} = \frac{S}{\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi} * \frac{\partial n}{\partial \rho} + \frac{S}{a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)} * \frac{\partial n}{\partial \varphi} - \frac{S}{l-z} * \frac{\partial n}{\partial z}$$

$$\frac{\partial n}{\partial s} = \frac{1}{X} * \frac{\partial n}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho Y} * \frac{\partial n}{\partial \varphi} - \frac{1}{Z} * \frac{\partial n}{\partial z}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial S} * \frac{\partial \bar{S}}{\partial S} = & \left[\frac{S^2}{(\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi)^2} * \frac{\partial n}{\partial \rho} + \frac{S^2}{(\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi)[a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2}(\sin \varphi + \cos \varphi)]} * \frac{\partial n}{\partial \varphi} - \frac{S^2}{(l-z)(\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi)} * \frac{\partial n}{\partial z} \right] \bar{e}_\rho \\ & + \left[\frac{\rho S^2}{[a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2}(\sin \varphi + \cos \varphi)](\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi)} * \frac{\partial n}{\partial \rho} + \frac{\rho S^2}{[a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2}(\sin \varphi + \cos \varphi)]^2} * \frac{\partial n}{\partial \varphi} - \frac{\rho S^2}{(l-z)[a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2}(\sin \varphi + \cos \varphi)]} * \frac{\partial n}{\partial z} \right] \bar{e}_\varphi \\ & - \left[\frac{S^2}{(l-z)(\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi)} * \frac{\partial n}{\partial \rho} + \frac{S^2}{(l-z)[a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2}(\sin \varphi + \cos \varphi)]} * \frac{\partial n}{\partial \varphi} - \frac{S^2}{(l-z)^2} * \frac{\partial n}{\partial z} \right] \bar{e}_z \end{aligned}$$

$$\frac{\partial n}{\partial S} * \frac{\partial \bar{S}}{\partial S} = \left[\frac{1}{X^2} * \frac{\partial n}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho XY} * \frac{\partial n}{\partial \varphi} - \frac{1}{XZ} * \frac{\partial n}{\partial z} \right] \bar{e}_\rho + \left[\frac{1}{XY} * \frac{\partial n}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho Y^2} * \frac{\partial n}{\partial \varphi} - \frac{1}{YZ} * \frac{\partial n}{\partial z} \right] \bar{e}_\varphi - \left[\frac{1}{XZ} * \frac{\partial n}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho YZ} * \frac{\partial n}{\partial \varphi} - \frac{1}{Z^2} * \frac{\partial n}{\partial z} \right] \bar{e}_z$$

$$\frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial \bar{S}}{\partial S} \right) = \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{S}{\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi} \bar{e}_\rho \right) + \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\rho S}{a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2}(\sin \varphi + \cos \varphi)} \bar{e}_\varphi \right) - \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{S}{l-z} \bar{e}_z \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{S}{\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi} \bar{e}_\rho \right) &= \frac{\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi}{(\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi)^2} \bar{e}_\rho \\ &- \left\{ \frac{S \left[\frac{S}{\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi} - a \cos \varphi * \frac{S}{a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2}(\sin \varphi + \cos \varphi)} \right]}{(\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi)^2} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{r^2 - a^2} \sin \varphi * \frac{a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2}(\sin \varphi + \cos \varphi)}{(\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi)^2} \right\} \bar{e}_\rho \\ &\quad + \frac{S}{\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi} * \frac{S}{a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2}(\sin \varphi + \cos \varphi)} \bar{e}_\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{S}{\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi} \bar{e}_\rho \right) &= \left[\frac{1}{(\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi)} - \frac{S^2}{(\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi)^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\sqrt{r^2 - a^2} \sin \varphi - a \cos \varphi) S^2}{[a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2}(\sin \varphi + \cos \varphi)](\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi)^2} \right] \bar{e}_\rho \\ &\quad + \frac{S^2}{(\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi)[a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2}(\sin \varphi + \cos \varphi)]} \bar{e}_\varphi \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\rho S}{a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)} \bar{e}_\varphi \right) = \frac{\frac{\partial}{\partial S} (\rho S) [a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)]}{[a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)]^2} \bar{e}_\varphi$$

$$- \frac{(\rho S) [a(\sin \varphi + \cos \varphi) - \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi - \cos \varphi)] \left(\frac{S}{a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)} \right)}{[a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)]^2} \bar{e}_\varphi$$

$$- \left(\frac{\rho S}{a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)} \right) \left(\frac{S}{a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)} \right) \bar{e}_\rho$$

$$\frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\rho S}{a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)} \bar{e}_\varphi \right) = \frac{(S \frac{\partial \rho}{\partial S} + \rho) [a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)]}{[a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)]^2} \bar{e}_\varphi$$

$$- \frac{\rho S^2 [a(\sin \varphi + \cos \varphi) - \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi - \cos \varphi)]}{[a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)]^3} \bar{e}_\varphi$$

$$- \left(\frac{\rho S^2}{[a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)]^2} \right) \bar{e}_\rho$$

$$\frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\rho S}{a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)} \bar{e}_\varphi \right) = \frac{\left(\frac{S^2}{\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi} + \rho \right) [a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)]}{[a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)]^2} \bar{e}_\varphi$$

$$- \frac{\rho S^2 [a(\sin \varphi + \cos \varphi) - \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi - \cos \varphi)]}{[a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)]^3} \bar{e}_\varphi - \left(\frac{\rho S^2}{[a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)]^2} \right) \bar{e}_\rho$$

$$\frac{\partial \bar{e}_\rho}{\partial S} = \frac{\partial \bar{e}_\rho}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial S} = \frac{\partial \varphi}{\partial S} \bar{e}_\varphi = \frac{S}{a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)} \bar{e}_\varphi$$

$$\frac{\partial \bar{e}_\varphi}{\partial S} = \frac{\partial \bar{e}_\varphi}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial S} = - \frac{\partial \varphi}{\partial S} \bar{e}_\rho = - \frac{S}{a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)} \bar{e}_\rho$$

$$\frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\rho S}{a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)} \bar{e}_\varphi \right) = - \frac{\rho S^2}{[a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)]^2} \bar{e}_\rho$$

$$+ \left[\frac{\rho}{a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)} + \frac{S^2}{(\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi) [a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)]} \right]$$

$$- \frac{\rho S^2 [a(\sin \varphi + \cos \varphi) - \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi - \cos \varphi)]}{[a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)]^3} \bar{e}_\varphi$$

$$\frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{S}{l-z} \bar{e}_z \right) = \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{S}{l-z} \right) \bar{e}_z = \frac{(l-z) - S \frac{\partial(l-z)}{\partial S}}{(l-z)^2} \bar{e}_z$$

$$\frac{\partial(l-z)}{\partial S} = \frac{\partial(l-z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial S} = - \frac{\partial z}{\partial S} = \frac{S}{l-z}$$

$$\frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{S}{l-z} \bar{e}_z \right) = \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{S}{l-z} \right) \bar{e}_z = \frac{(l-z) - \frac{S^2}{l-z}}{(l-z)^2} \bar{e}_z$$

$$\frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{S}{l-z} \bar{e}_z \right) = \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{S}{l-z} \right) \bar{e}_z = \left(\frac{1}{(l-z)} - \frac{S^2}{(l-z)^3} \right) \bar{e}_z$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial S} &= \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial \bar{S}}{\partial S} \right) = \\ &= \frac{1}{(\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi)} - \frac{\rho S^2}{[a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)]^2} - \frac{S^2}{(\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi)^3} \\ &\quad - \frac{(\sqrt{r^2 - a^2} \sin \varphi - a \cos \varphi) S^2}{[a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)](\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi)^2} \bar{e}_\rho \\ &+ \left[\frac{\rho}{a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)} + \frac{2S^2}{(\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi)[a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)]} \right] \\ &\quad - \frac{\rho S^2 [a(\sin \varphi + \cos \varphi) - \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi - \cos \varphi)]}{[a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)]^3} \bar{e}_\varphi - \left(\frac{1}{(l-z)} - \frac{S^2}{(l-z)^3} \right) \bar{e}_z \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial \bar{S}}{\partial S} \right) = \left[\frac{1}{SX} - \frac{1}{\rho Y^2} - \frac{1}{SX^3} - \frac{r \sin(\theta - \varphi)}{\rho SYX^2} \right] \bar{e}_\rho + \left[\frac{1}{SY} + \frac{2}{\rho XY} - \frac{r[\cos(\theta - \varphi) + \sin(\theta - \varphi)]}{\rho^2 SY^3} \right] \bar{e}_\varphi - \left(\frac{1}{SZ} - \frac{1}{SZ^3} \right) \bar{e}_z$$

$$\begin{aligned} n^* \frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial S} &= \\ n^* &\left[\frac{1}{(\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi)} - \frac{\rho S^2}{[a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)]^2} - \frac{S^2}{(\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi)^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\sqrt{r^2 - a^2} \sin \varphi - a \cos \varphi) S^2}{[a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)](\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi)^2} \right] \bar{e}_\rho \\ n^* &\left[\frac{\rho}{a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)} + \frac{2S^2}{(\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi)[a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)]} \right] \\ &\quad - \frac{\rho S^2 [a(\sin \varphi + \cos \varphi) - \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi - \cos \varphi)]}{[a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)]^3} \bar{e}_\varphi - n^* \left(\frac{1}{(l-z)} - \frac{S^2}{(l-z)^3} \right) \bar{e}_z \end{aligned}$$

$$n^* \frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial S} = n^* \left[\frac{1}{SX} - \frac{1}{\rho Y^2} - \frac{1}{SX^3} - \frac{r \sin(\theta - \varphi)}{\rho SYX^2} \right] \bar{e}_\rho + n^* \left[\frac{1}{SY} + \frac{2}{\rho XY} - \frac{r[\cos(\theta - \varphi) + \sin(\theta - \varphi)]}{\rho^2 SY^3} \right] \bar{e}_\varphi - n^* \left(\frac{1}{SZ} - \frac{1}{SZ^3} \right) \bar{e}_z$$

$$n^* \frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial S} = A^* n \bar{e}_\rho + B^* n \bar{e}_\varphi - C^* n \bar{e}_z$$

$$A = \left[\frac{1}{(\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi)} - \frac{\rho S^2}{[a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)]^2} - \frac{S^2}{(\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi)^3} \right. \\ \left. - \frac{(\sqrt{r^2 - a^2} \sin \varphi - a \cos \varphi) S^2}{[a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)](\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi)^2} \right]$$

$$B = \left[\frac{\rho}{a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)} + \frac{2S^2}{(\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi)[a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)]} \right. \\ \left. - \frac{\rho S^2 [a(\sin \varphi + \cos \varphi) - \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi - \cos \varphi)]}{[a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)]^3} \right]$$

$$C = \left(\frac{1}{(l-z)} - \frac{S^2}{(l-z)^3} \right)$$

$$n^* \frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial S} = A^* n \bar{e}_\rho + B^* n \bar{e}_\varphi - C^* n \bar{e}_z$$

$$A = \left[\frac{1}{SX} - \frac{1}{\rho Y^2} - \frac{1}{SX^3} - \frac{r \sin(\theta - \varphi)}{\rho SYX^2} \right]$$

$$B = \left[\frac{1}{SY} + \frac{2}{\rho XY} - \frac{r[\cos(\theta - \varphi) + \sin(\theta - \varphi)]}{\rho^2 SY^3} \right]$$

$$C = \left(\frac{1}{SZ} - \frac{1}{SZ^3} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial S} \left(n \frac{\partial \bar{S}}{\partial S} \right) = \frac{\partial n}{\partial S} \frac{\partial \bar{S}}{\partial S} + n \frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial S^2} =$$

$$A^* n \bar{e}_\rho + \left[\frac{S^2}{(\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi)^2} \frac{\partial n}{\partial \rho} + \frac{S^2}{(\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi)[a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)]} \frac{\partial n}{\partial \varphi} - \frac{S^2}{(l-z)(\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi)} \frac{\partial n}{\partial z} \right] \bar{e}_\rho$$

$$B^* n \bar{e}_\varphi + \left[\frac{\rho S^2}{[a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)](\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi)} \frac{\partial n}{\partial \rho} + \frac{\rho S^2}{[a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)]^2} \frac{\partial n}{\partial \varphi} - \frac{\rho S^2}{(l-z)[a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)]} \frac{\partial n}{\partial z} \right] \bar{e}_\varphi$$

$$-C^* n \bar{e}_z - \left[\frac{S^2}{(l-z)(\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi)} \frac{\partial n}{\partial \rho} + \frac{S^2}{(l-z)[a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)]} \frac{\partial n}{\partial \varphi} - \frac{S^2}{(l-z)^2} \frac{\partial n}{\partial z} \right] \bar{e}_z$$

$$\frac{\partial}{\partial S} \left(n \frac{\partial \bar{S}}{\partial S} \right) = \frac{\partial n}{\partial S} * \frac{\partial \bar{S}}{\partial S} + n \frac{\partial \bar{S}}{\partial S} = \text{grad } \bar{n}$$

$$A^* n + \left[\frac{S^2}{(\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi)^2} * \frac{\partial n}{\partial \rho} + \frac{S^2}{(\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi) [a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)]} * \frac{\partial n}{\partial \varphi} - \frac{S^2}{(l-z)(\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi)} * \frac{\partial n}{\partial z} \right] = \frac{\partial n}{\partial \rho}$$

$$B^* n + \frac{\rho S^2}{[a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)] (\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi)} * \frac{\partial n}{\partial \rho} + \frac{\rho S^2}{[a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)]^2} * \frac{\partial n}{\partial \varphi} - \frac{\rho S^2}{(l-z)[a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)]} * \frac{\partial n}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial n}{\partial \varphi}$$

$$-C^* n - \left[\frac{S^2}{(l-z)(\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi)} * \frac{\partial n}{\partial \rho} + \frac{S^2}{(l-z)[a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)]} * \frac{\partial n}{\partial \varphi} - \frac{S^2}{(l-z)^2} * \frac{\partial n}{\partial z} \right] = \frac{\partial n}{\partial z}$$

Nous rappelons que $\vec{\nabla} n$ dans les coordonnées cylindriques : $\vec{\nabla} n = \frac{\partial n}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial n}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial n}{\partial z} \vec{e}_z$

Donc ; l'équation d'ICONALE $\frac{\partial}{\partial S} \left(n \frac{\partial \bar{S}}{\partial S} \right) = \vec{\nabla} n$ dans les coordonnées cylindriques devient :

$$A^* n + \left[\left(\frac{S^2}{(\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi)^2} - 1 \right) * \frac{\partial n}{\partial \rho} + \frac{S^2}{(\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi) [a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)]} * \frac{\partial n}{\partial \varphi} - \frac{S^2}{(l-z)(\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi)} * \frac{\partial n}{\partial z} \right] = 0$$

$$B^* n + \frac{\rho S^2}{[a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)] (\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi)} * \frac{\partial n}{\partial \rho} + \left(\frac{\rho S^2}{[a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)]^2} - \frac{1}{\rho} \right) * \frac{\partial n}{\partial \varphi} - \frac{\rho S^2}{(l-z)[a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)]} * \frac{\partial n}{\partial z} = 0$$

$$-C^* n - \left[\frac{S^2}{(l-z)(\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi)} * \frac{\partial n}{\partial \rho} + \frac{S^2}{(l-z)[a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)]} * \frac{\partial n}{\partial \varphi} - \left(\frac{S^2}{(l-z)^2} + 1 \right) * \frac{\partial n}{\partial z} \right] = 0$$

$$A^* n + \frac{S^2}{\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi} \left[\left(\frac{1}{\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi} - \frac{\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi}{S^2} \right) * \frac{\partial n}{\partial \rho} + \frac{1}{[a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)]} * \frac{\partial n}{\partial \varphi} - \frac{1}{(l-z)} * \frac{\partial n}{\partial z} \right] = 0$$

$$B^* n + \frac{\rho S^2}{a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)} \left[\frac{1}{(\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi)} * \frac{\partial n}{\partial \rho} + \left(\frac{1}{a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)} - \frac{a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)}{\rho S^2} \right) * \frac{\partial n}{\partial \varphi} - \frac{1}{(l-z)} * \frac{\partial n}{\partial z} \right] = 0$$

$$-C^* n - \frac{S^2}{l-z} \left[\frac{1}{(\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi)} * \frac{\partial n}{\partial \rho} + \frac{1}{[a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)]} * \frac{\partial n}{\partial \varphi} - \frac{1}{l-z} \left(1 - \frac{(l-z)^2}{S^2} \right) * \frac{\partial n}{\partial z} \right] = 0$$

$$\alpha^* n + \left[\left(\frac{1}{\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi} - \frac{\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi}{S^2} \right) * \frac{\partial n}{\partial \rho} + \frac{1}{[a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)]} * \frac{\partial n}{\partial \varphi} - \frac{1}{(l-z)} * \frac{\partial n}{\partial z} \right] = 0$$

$$\beta^* n + \left[\frac{1}{(\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi)} * \frac{\partial n}{\partial \rho} + \left(\frac{1}{a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)} - \frac{a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)}{\rho S^2} \right) * \frac{\partial n}{\partial \varphi} - \frac{1}{(l-z)} * \frac{\partial n}{\partial z} \right] = 0$$

$$\gamma^* n + \left[\frac{1}{(\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi)} * \frac{\partial n}{\partial \rho} + \frac{1}{[a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)]} * \frac{\partial n}{\partial \varphi} - \frac{1}{l-z} \left(1 - \frac{(l-z)^2}{S^2} \right) * \frac{\partial n}{\partial z} \right] = 0$$

Elle peut s'écrire sous la forme

$$M * X_1 = -Q * n$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 - \frac{(\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi)^2}{S^2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 - \frac{a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2}(\sin \varphi + \cos \varphi)}{\rho S} & 1 \\ 1 & 1 & 1 - \left(\frac{l-z}{S}\right)^2 \end{pmatrix}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi} * \frac{\partial n}{\partial \rho} \\ \frac{1}{a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2}(\sin \varphi + \cos \varphi)} * \frac{\partial n}{\partial \varphi} \\ -\frac{1}{(l-z)} * \frac{\partial n}{\partial z} \end{pmatrix}$$

et

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \frac{\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi}{S^2} * A$$

$$\beta = \frac{a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2}(\sin \varphi + \cos \varphi)}{\rho S^2} * B$$

$$\gamma = \frac{l-z}{S^2} * C$$

Soit

$$M = \begin{pmatrix} 1 - X^2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 - Y^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 - Z^2 \end{pmatrix}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{SX} * \frac{\partial n}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho SY} * \frac{\partial n}{\partial \varphi} \\ -\frac{1}{SZ} * \frac{\partial n}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \left[\frac{1}{S^2} - \frac{\rho(\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi)}{[a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2}(\sin \varphi + \cos \varphi)]^2} - \frac{1}{(\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi)^2} \right. \\ \left. - \frac{(\sqrt{r^2 - a^2} \sin \varphi - a \cos \varphi)}{[a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2}(\sin \varphi + \cos \varphi)](\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi)} \right]$$

$$\beta = \left[\frac{1}{S^2} + \frac{2\rho}{(\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi)} - \frac{[a(\sin \varphi + \cos \varphi) - \sqrt{r^2 - a^2}(\sin \varphi - \cos \varphi)]}{[a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2}(\sin \varphi + \cos \varphi)]^2} \right]$$

$$\gamma = \left(\frac{1}{S^2} - \frac{1}{(l-z)^2} \right)$$

$$\alpha = \frac{1}{S^2} - \frac{X}{\rho S Y^2} - \frac{1}{S^2 X^2} - \frac{r \sin(\theta - \varphi)}{\rho S^2 X Y}$$

$$\beta = \frac{1}{S^2} + \frac{2\rho}{S X} - \frac{r[\cos(\theta - \varphi) + \sin(\theta - \varphi)]}{\rho^2 S^2 Y^2}$$

$$\gamma = \frac{1}{S^2} - \frac{1}{S^2 Z^2}$$

La matrice M est symétrique donc elle admet une axisymétrie.

Soit (S) : $Q^* n + M^* X_1 = 0$

On va résoudre le système(S) on procède comme suit :

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 - X^2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 - Y^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 - Z^2 \end{vmatrix} = X^2 \begin{vmatrix} Y^2 & Y^2 \\ -Z^2 & 1 - Z^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -Y^2 & Y^2 \\ 0 & -Z^2 \end{vmatrix}$$

$$\det M = X^2[Y^2(1 - Z^2) + Z^2] + Y^2 Z^2 = X^2[Y^2 - Y^2 Z^2 + Z^2] + Y^2 Z^2$$

$$\det M = X^2 Y^2 - X^2 Y^2 Z^2 + X^2 Z^2 + Y^2 Z^2$$

$$\det M = X^2 Y^2 + X^2 Z^2 + Y^2 Z^2 - X^2 Y^2 Z^2$$

$$(S): M * X_1 + Q * n = 0$$

$$M * X_1 = -Q * n$$

$$\begin{pmatrix} 1 - \left(\frac{\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi}{S} \right)^2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 - \left(\frac{a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2}(\sin \varphi + \cos \varphi)}{\rho S} \right)^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 - \left(\frac{l-z}{S} \right)^2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi} * \frac{\partial n}{\partial \rho} \\ \frac{1}{a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2}(\sin \varphi + \cos \varphi)} * \frac{\partial n}{\partial \varphi} \\ -\frac{1}{(l-z)} * \frac{\partial n}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha * n \\ -\beta * n \\ -\gamma * n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 - X^2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 - Y^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 - Z^2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{1}{SX} * \frac{\partial n}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho SY} * \frac{\partial n}{\partial \varphi} \\ -\frac{1}{SZ} * \frac{\partial n}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha * n \\ -\beta * n \\ -\gamma * n \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\rho - a \sin \varphi - \sqrt{r^2 - a^2} \cos \varphi} * \frac{\partial n}{\partial \rho} = \frac{\det H_1}{\det M}$$

$$\frac{1}{SX} * \frac{\partial n}{\partial \rho} = \frac{\det H_1}{\det M}$$

$$\begin{aligned}
H_1 &= \begin{pmatrix} -\alpha * n & 1 & 1 \\ -\beta * n & 1 - Y^2 & 1 \\ -\gamma * n & 1 & 1 - Z^2 \end{pmatrix} \\
\det H_1 &= \begin{vmatrix} -\alpha * n & 1 & 1 \\ -\beta * n & 1 - Y^2 & 1 \\ -\gamma * n & 1 & 1 - Z^2 \end{vmatrix} = -n \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ \beta & 1 - Y^2 & 1 \\ \gamma & 1 & 1 - Z^2 \end{vmatrix} \\
&= -n \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ \beta & Y^2 & 1 \\ \gamma & Z^2 & 1 - Z^2 \end{vmatrix} \\
&= -n\alpha \begin{vmatrix} Y^2 & 1 \\ Z^2 & 1 - Z^2 \end{vmatrix} - n \begin{vmatrix} \beta & Y^2 \\ \gamma & Z^2 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det H_1 &= -n\alpha \begin{vmatrix} Y^2 & 1 \\ Z^2 & 1 - Z^2 \end{vmatrix} - n \begin{vmatrix} \beta & Y^2 \\ \gamma & Z^2 \end{vmatrix} \\
&= -\{Y^2(1 - Z^2) - Z^2\}\alpha + \beta Z^2 - \gamma Y^2 \} n
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{SX} * \frac{\partial n}{\partial \rho} = -\frac{[Y^2(1 - Z^2) - Z^2]\alpha + \beta Z^2 - \gamma Y^2}{X^2 Y^2 + X^2 Z^2 + Y^2 Z^2 - X^2 Y^2 Z^2} n$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{SX} * \frac{\partial n}{\partial \rho} &= \frac{[Y^2 - Y^2 Z^2 - Z^2]\alpha + \beta Z^2 - \gamma Y^2}{X^2 Y^2 + X^2 Z^2 + Y^2 Z^2 - X^2 Y^2 Z^2} n \\
\frac{1}{SX} * \frac{\partial n}{\partial \rho} &= -\frac{[Y^2 - Y^2 Z^2 - Z^2]\alpha + \beta Z^2 - \gamma Y^2}{X^2 Y^2 + X^2 Z^2 + Y^2 Z^2 - X^2 Y^2 Z^2} n \\
\frac{1}{SX} * \frac{\partial n}{\partial \rho} &= -\frac{\alpha Y^2 - \alpha Y^2 Z^2 - \alpha Z^2 + \beta Z^2 - \gamma Y^2}{X^2 Y^2 + X^2 Z^2 + Y^2 Z^2 - X^2 Y^2 Z^2} n \\
\frac{\partial n}{\partial \rho} &= -\frac{\alpha SXY^2 - \alpha SXY^2 Z^2 - \alpha SXZ^2 + \beta SXZ^2 - \gamma SXY^2}{X^2 Y^2 + X^2 Z^2 + Y^2 Z^2 - X^2 Y^2 Z^2} n \\
\frac{\partial n}{\partial \rho} &= -\frac{(\alpha - \gamma)SXY^2 - \alpha SXY^2 Z^2 + (\beta - \alpha)SXZ^2}{X^2 Y^2 + X^2 Z^2 + Y^2 Z^2 - X^2 Y^2 Z^2} n
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial n(\rho, \varphi, z)}{\partial \rho} + \omega_1(\rho, \varphi, z) * n(\rho, \varphi, z) = 0$$

$$\text{Avec } \frac{1}{a(\sin \varphi - \cos \varphi) + \sqrt{r^2 - a^2} (\sin \varphi + \cos \varphi)} * \frac{\partial n}{\partial \varphi} = \frac{\det H_2}{\det M}$$

$$\frac{1}{\rho SY} * \frac{\partial n}{\partial \varphi} = \frac{\det H_2}{\det M}$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 - X^2 & -\alpha * n & 1 \\ 1 & -\beta * n & 1 \\ 1 & -\gamma * n & 1 - Z^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det H_2 &= \begin{vmatrix} 1 - X^2 & -\alpha * n & 1 \\ 1 & -\beta * n & 1 \\ 1 & -\gamma * n & 1 - Z^2 \end{vmatrix} = -n \begin{vmatrix} 1 - X^2 & \alpha & 1 \\ 1 & \beta & 1 \\ 1 & \gamma & 1 - Z^2 \end{vmatrix} \\ &= -n \begin{vmatrix} X^2 & \alpha - \beta & 0 \\ 1 & \beta & 1 \\ 1 & \gamma & 1 - Z^2 \end{vmatrix} = -n X^2 \begin{vmatrix} \beta & 1 \\ \gamma & 1 - Z^2 \end{vmatrix} - n(\alpha - \beta) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 - Z^2 \end{vmatrix} \\ &= -n X^2 [\beta(1 - Z^2) - \gamma] + n(\alpha - \beta) Z^2 \\ &= -\{X^2 [\beta(1 - Z^2) - \gamma] - (\alpha - \beta) Z^2\} n \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\rho SY} * \frac{\partial n}{\partial \varphi} = -\frac{\{X^2 [\beta(1 - Z^2) - \gamma] - (\alpha - \beta) Z^2\}}{X^2 Y^2 + X^2 Z^2 + Y^2 Z^2 - X^2 Y^2 Z^2} n$$

$$\frac{1}{\rho SY} * \frac{\partial n}{\partial \varphi} = - \frac{X^2[\beta(1-Z^2) - \gamma] - (\alpha - \beta)Z^2}{X^2Y^2 + X^2Z^2 + Y^2Z^2 - X^2Y^2Z^2} n$$

$$\frac{1}{\rho SY} * \frac{\partial n}{\partial \varphi} = - \frac{\beta X^2 - \beta X^2 Z^2 - \gamma X^2 - (\alpha - \beta)Z^2}{X^2Y^2 + X^2Z^2 + Y^2Z^2 - X^2Y^2Z^2} n$$

$$\frac{\partial n}{\partial \varphi} = - \frac{(\beta - \gamma)\rho SYX^2 - \beta\rho SYX^2Z^2 - (\alpha - \beta)\rho SYZ^2}{X^2Y^2 + X^2Z^2 + Y^2Z^2 - X^2Y^2Z^2} n$$

$$\frac{\partial n(\rho, \varphi, z)}{\partial \varphi} + \omega_2(\rho, \varphi, z) * n(\rho, \varphi, z) = 0 \quad \text{Avec} \quad \omega_2 = \frac{(\beta - \gamma)\rho SYX^2 - \beta\rho SYX^2Z^2 - (\alpha - \beta)\rho SYZ^2}{X^2Y^2 + X^2Z^2 + Y^2Z^2 - X^2Y^2Z^2}$$

$$-\frac{1}{(l-z)} * \frac{\partial n}{\partial z} = \frac{\det H_3}{\det M}$$

$$H_3 = \begin{pmatrix} 1-X^2 & 1 & -\alpha * n \\ 1 & 1-Y^2 & -\beta * n \\ 1 & 1 & -\gamma * n \end{pmatrix}$$

$$\det H_3 = \begin{vmatrix} 1-X^2 & 1 & -\alpha * n \\ 1 & 1-Y^2 & -\beta * n \\ 1 & 1 & -\gamma * n \end{vmatrix} = -n \begin{vmatrix} 1-X^2 & 1 & \alpha \\ 1 & 1-Y^2 & \beta \\ 1 & 1 & \gamma \end{vmatrix}$$

$$= -n \begin{vmatrix} 1-X^2 & 1 & \alpha \\ 1 & 1-Y^2 & \beta \\ 1 & 1 & \gamma \end{vmatrix} = -n \begin{vmatrix} X^2 & 0 & \gamma - \alpha \\ 1 & 1-Y^2 & \beta \\ 1 & 1 & \gamma \end{vmatrix}$$

$$= -n X^2 \begin{vmatrix} 1-Y^2 & \beta \\ 1 & \gamma \end{vmatrix} - n(\gamma - \alpha) \begin{vmatrix} 1 & 1-Y^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -n \{ X^2(\gamma(1-Y^2) - \beta) + (\gamma - \alpha)Y^2 \}$$

$$-\frac{1}{SZ} * \frac{\partial n}{\partial z} = - \frac{\{ X^2(\gamma(1-Y^2) - \beta) + (\gamma - \alpha)Y^2 \}}{X^2Y^2 + X^2Z^2 + Y^2Z^2 - X^2Y^2Z^2} n$$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{SZ} * \frac{\partial n}{\partial z} &= -\frac{\{X^2(\gamma(1-Y^2) - \beta) + (\gamma - \alpha)Y^2\}}{X^2Y^2 + X^2Z^2 + Y^2Z^2 - X^2Y^2Z^2} n \\
-\frac{1}{SZ} * \frac{\partial n}{\partial z} &= -\frac{\{X^2(\gamma - \gamma Y^2 - \beta) + (\gamma - \alpha)Y^2\}}{X^2Y^2 + X^2Z^2 + Y^2Z^2 - X^2Y^2Z^2} n \\
\frac{1}{SZ} * \frac{\partial n}{\partial z} &= \frac{(\gamma X^2 - \gamma X^2 Y^2 - \beta X^2) + (\gamma - \alpha)Y^2}{X^2Y^2 + X^2Z^2 + Y^2Z^2 - X^2Y^2Z^2} n \\
\frac{1}{SZ} * \frac{\partial n}{\partial z} &= -\frac{(\beta - \gamma)X^2 + \gamma X^2 Y^2 - (\gamma - \alpha)Y^2}{X^2Y^2 + X^2Z^2 + Y^2Z^2 - X^2Y^2Z^2} n \\
\frac{\partial n}{\partial z} &= -\frac{(\beta - \gamma)SZX^2 + \gamma SZX^2 Y^2 - (\gamma - \alpha)SZY^2}{X^2Y^2 + X^2Z^2 + Y^2Z^2 - X^2Y^2Z^2} n
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial n(\rho, \varphi, z)}{\partial \rho} + \omega_1(\rho, \varphi, z) * n(\rho, \varphi, z) = 0$$

Avec

$$\omega_1 = \frac{(\alpha - \gamma)SXY^2 - \alpha SXY^2 Z^2 + (\beta - \alpha)SXZ^2}{X^2Y^2 + X^2Z^2 + Y^2Z^2 - X^2Y^2Z^2}$$

$$\frac{\partial n(\rho, \varphi, z)}{\partial \varphi} + \omega_2(\rho, \varphi, z) * n(\rho, \varphi, z) = 0$$

Avec

$$\omega_2 = \frac{(\beta - \gamma)\rho SYX^2 - \beta \rho SYX^2 Z^2 - (\alpha - \beta)\rho SYZ^2}{X^2Y^2 + X^2Z^2 + Y^2Z^2 - X^2Y^2Z^2}$$

$$\frac{\partial n(\rho, \varphi, z)}{\partial z} + \omega_3(\rho, \varphi, z) * n(\rho, \varphi, z) = 0$$

Avec

$$\omega_3 = \frac{(\beta - \gamma)SZX^2 + \gamma SZX^2 Y^2 - (\gamma - \alpha)SZY^2}{X^2Y^2 + X^2Z^2 + Y^2Z^2 - X^2Y^2Z^2}$$

$\Delta = \det M$

$$\omega_1 = \frac{(\alpha - \gamma)SXY^2 - \alpha SXY^2 Z^2 + (\beta - \alpha)SXZ^2}{X^2Y^2 + X^2Z^2 + Y^2Z^2 - X^2Y^2Z^2}$$

$$a_1 = (\alpha - \gamma)SXY^2$$

$$a_2 = -\alpha SXY^2 Z^2$$

$$a_3 = (\beta - \alpha)SXZ^2$$

$$\omega_1 = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{\Delta}$$

$$\omega_2 = \frac{(\beta - \gamma)\rho SYX^2 - \beta\rho SYX^2 Z^2 - (\alpha - \beta)\rho SYZ^2}{X^2 Y^2 + X^2 Z^2 + Y^2 Z^2 - X^2 Y^2 Z^2}$$

$$b_1 = (\beta - \gamma)\rho SYX^2$$

$$b_2 = -\beta\rho SYX^2 Z^2$$

$$b_3 = -(\alpha - \beta)\rho SYZ^2$$

$$\omega_2 = \frac{b_1 + b_2 + b_3}{\Delta}$$

$$\omega_3 = \frac{(\beta - \gamma)SZX^2 + \gamma SZX^2 Y^2 - (\gamma - \alpha)SZY^2}{X^2 Y^2 + X^2 Z^2 + Y^2 Z^2 - X^2 Y^2 Z^2}$$

$$c_1 = (\beta - \gamma)SZX^2$$

$$c_2 = \gamma SZX^2 Y^2$$

$$c_3 = -(\gamma - \alpha)SZY^2$$

$$\omega_3 = \frac{c_1 + c_2 + c_3}{\Delta}$$

Descritisation du système associé à l'équation d'Iconale

$$\frac{\partial n(\rho, \varphi, z)}{\partial \rho} + \omega_1(\rho, \varphi, z) * n(\rho, \varphi, z) = 0 \quad \text{Avec} \quad \omega_1 = \frac{(\alpha - \gamma)SXY^2 - \alpha SXY^2 Z^2 + (\beta - \alpha)SXZ^2}{X^2 Y^2 + X^2 Z^2 + Y^2 Z^2 - X^2 Y^2 Z^2}$$

$$\frac{\partial n(\rho, \varphi, z)}{\partial \varphi} + \omega_2(\rho, \varphi, z) * n(\rho, \varphi, z) = 0 \quad \text{Avec} \quad \omega_2 = \frac{(\beta - \gamma)\rho SYX^2 - \beta\rho SYX^2 Z^2 - (\alpha - \beta)\rho SYZ^2}{X^2 Y^2 + X^2 Z^2 + Y^2 Z^2 - X^2 Y^2 Z^2}$$

$$\frac{\partial n(\rho, \varphi, z)}{\partial z} + \omega_3(\rho, \varphi, z) * n(\rho, \varphi, z) = 0 \quad \text{Avec} \quad \omega_3 = \frac{(\beta - \gamma)SZX^2 + \gamma SZX^2 Y^2 - (\gamma - \alpha)SZY^2}{X^2 Y^2 + X^2 Z^2 + Y^2 Z^2 - X^2 Y^2 Z^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial n(\rho, \varphi, z)}{\partial \rho} = \frac{n(\rho + \delta\rho, \varphi, z) - n(\rho, \varphi, z)}{\delta\rho} \\ \frac{\partial n(\rho, \varphi, z)}{\partial \varphi} = \frac{n(\rho, \varphi + \delta\varphi, z) - n(\rho, \varphi, z)}{\delta\varphi} \\ \frac{\partial n(\rho, \varphi, z)}{\partial z} = \frac{n(\rho, \varphi, z + \delta z) - n(\rho, \varphi, z)}{\delta z} \end{array} \right.$$

Donc le système s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{n_{(i+1)jk} - n_{ijk}}{(\delta\rho)_j} + \omega_{ijk}^1 * n_{ijk} = 0 \\ \frac{n_{i(j+1)k} - n_{ijk}}{(\delta\varphi)_j} + \omega_{ijk}^2 * n_{ijk} = 0 \\ \frac{n_{ij(k+1)} - n_{ijk}}{(\delta z)_k} + \omega_{ijk}^3 * n_{ijk} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\delta\rho)_i = \rho_{i+1} - \rho_i \\ (\delta\varphi)_j = \varphi_{j+1} - \varphi_j \\ (\delta z)_k = z_{k+1} - z_k \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n_{(i+1)jk} - n_{ijk} + (\delta\rho)_i * \omega_{ijk}^1 * n_{ijk} = 0 \\ n_{i(j+1)k} - n_{ijk} + (\delta\varphi)_j * \omega_{ijk}^2 * n_{ijk} = 0 \\ n_{ij(k+1)} - n_{ijk} + (\delta z)_k * \omega_{ijk}^3 * n_{ijk} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n_{(i+1)jk} = (1 - (\delta\rho)_i * \omega_{ijk}^1) * n_{ijk} \\ n_{i(j+1)k} = (1 - (\delta\varphi)_j * \omega_{ijk}^2) * n_{ijk} \\ n_{ij(k+1)} = (1 - (\delta z)_k * \omega_{ijk}^3) * n_{ijk} \end{array} \right.$$

$$n_{(i+1)(j+1)k} = (1 - (\delta\varphi)_j * \omega_{(i+1)jk}^2) * (1 - (\delta\rho)_i * \omega_{ijk}^1) * n_{ijk}$$

$$n_{(i+1)(j+1)(k+1)} = (1 - (\delta\rho)_j * \omega_{(i+1)j(k+1)}^2) * (1 - (\delta\rho)_i * \omega_{ij(k+1)}^1) * n_{ij(k+1)}$$

$$n_{(i+1)(j+1)(k+1)} = (1 - (\delta\rho)_j * \omega_{(i+1)j(k+1)}^2) * (1 - (\delta\rho)_i * \omega_{ij(k+1)}^1) * n_{ij(k+1)}$$

$$n_{ij(k+1)} = (1 - (\delta z)_k * \omega_{ijk}^3) * n_{ijk}$$

$$n_{(i+1)(j+1)(k+1)} = (1 - (\delta\rho)_j * \omega_{(i+1)j(k+1)}^2) * (1 - (\delta\rho)_i * \omega_{ij(k+1)}^1) * (1 - (\delta z)_k * \omega_{ijk}^3) * n_{ijk}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \sum_{i=0}^{i=p} (\delta\rho)_i \\ \varphi = \sum_{j=0}^{j=m} (\delta\varphi)_j \\ z = \sum_{k=0}^{k=q} (\delta z)_k \end{array} \right.$$

$$\text{Càd} \left\{ \begin{array}{l} n_{(p+1)mq} = n_{pmq} = n_0 \\ n_{p(m+1)q} = n_{pmq} = n_0 \\ n_{p(q+1)m} = n_{pmq} = n_0 \end{array} \right.$$

$$\text{Pour} \left\{ \begin{array}{l} \rho \geq \rho_f \\ \varphi \geq \varphi_f \\ z \geq z_f \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n_{(p+1)mq} = n_{pmq} = n_0 \\ n_{p(m+1)q} = n_{pmq} = n_0 \\ n_{pm(q+1)} = n_{pmq} = n_0 \end{array} \right.$$