Campus Universitaire - Ait Melloul

El Mokhtar El Ouardi

Série N°2 : Cinématique sans et avec changement de référentiel

Exercice N°1

On considère un point matériel M se déplaçant dans le plan (Oxy) et R(O, x, y, z) est un référentiel muni de la base $(\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k})$. Les coordonnées du point M dans R sont données par :

x(t) = t + 1 ; y(t) = t^2 + 1 et z(t) = 0 , (t étant le temps)

1- Donner l'équation de la trajectoire de M dans R. En déduire sa nature ;

2- Calculer la vitesse $\vec{V}(M/R)$ et l'accélération $\vec{\gamma}(M/R)$ du point M.

3- Déterminer les vecteurs unitaires $\vec{\tau}$ tangent à la trajectoire, La normale $\vec{n}$ et la binormale $\vec{b}$ de la base de Frenet,

4- En Déduire le rayon de courbure ρ.

Correction de l'exercice N°1

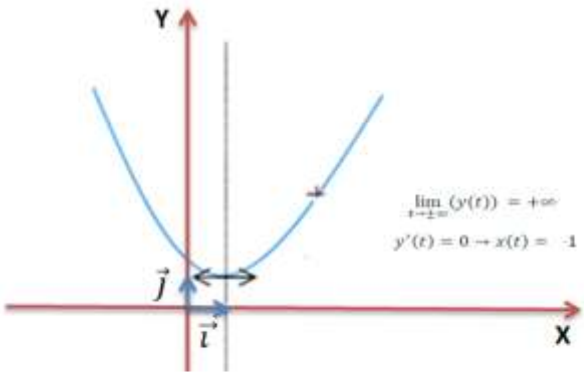
1- Soit un point matériel M de coordonnées :

x(t) = t + 1 ; y(t) = t^2 + 1 et z(t) = 0 , (t étant le temps)

L'équation de la trajectoire de M dans R

t = x -1 y(t) = $(x - 1)^2$ + 1

donc la trajectoire décrit par le point M est parabole



2-

Calcul de la vitesse $\vec{V}(M/R)$

$$\vec{V}(M/R) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d(t+1)\vec{\imath} + (t^2+1)\vec{\jmath}}{dt}\right|_R$$

$$= 1\,\vec{\imath} + 2t\,\vec{\jmath}$$

Calcul de l'accélération $\vec{\gamma}(M/R)$

$$\vec{\gamma}(M/R) = \left.\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\right|_R = \left.\frac{1\,\vec{\imath} + 2t\,\vec{\jmath}}{dt}\right|_R = 2\,\vec{\jmath}$$

3-

- **Vecteur unitaire $\vec{\tau}$ tangent à la trajectoire**

$\vec{\tau}$ à la même direction et le sens que le vecteur vitesse $\vec{\tau} = \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|}$

$\vec{V} = 1\,\vec{\imath} + 2t\,\vec{\jmath}$ & $\|\vec{V}\| = \sqrt{1+4t^2}$

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|} = \frac{1\,\vec{\imath} + 2t\,\vec{\jmath}}{\sqrt{1+4t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\vec{\imath} + \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}}\vec{\jmath}$$

- **La normale $\vec{n}$ à la trajectoire**

Soit *s* l'abscisse curviligne, la normale à la trajectoire est donnée par la relation :

$$\vec{n} = \vec{b} \wedge \vec{\tau} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} \\ \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{-1}{\sqrt{1+4t^2}}\vec{\imath} + \frac{1t}{\sqrt{1+4t^2}}\vec{\jmath}$$

- **La binormale $\vec{b}$**

C'est un vecteur unitaire perpendiculaire au deux premiers, d'où : $\vec{b} = \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

4- Le rayon de courbure ρ

Dans la base de Frênet, l'accélération du point matériel est égale s'écrit : $\vec{\gamma} = \overrightarrow{\gamma_N} + \overrightarrow{\gamma_t}$
Où $\overrightarrow{\gamma_N}$ et $\overrightarrow{\gamma_t}$ sont respectivement l'accélération normale et tangentielle.

Or nous savons que : $\gamma_N = \frac{V^2}{\rho}$, calculons γ_N:

Comme $\gamma_t = \frac{dV}{dt} = \frac{4t}{\sqrt{1+4t^2}}$ donc $\gamma_N{}^2 = \gamma^2 - \gamma_t{}^2 = 4 - \frac{16t^2}{1+4t^2} = \frac{4+16t^2-16t^2}{1+4t^2} = \frac{4}{1+4t^2}$

$$\rho = \frac{V^2}{\gamma_N} = \frac{1+4t^2}{\sqrt{\frac{4}{1+4t^2}}} = \frac{(1+4t^2)^{3/2}}{2}$$

Exercice N°2

On considère une courbe (C) sur laquelle se déplace un point matériel M d'abscisse curviligne $s(t)$. Le vecteur vitesse du point M dans un repère orthonormé direct $R(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est $\vec{V}(M/R)$ de module V. On définit la base locale (ou base de Frenet) $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$ telle que $\vec{V}(M/R) = V\vec{\tau}$.

1- Que désignent les vecteurs $\vec{\tau}$, $\vec{n}$ et $\vec{b}$?

2- Quelle relation existe - t -il entre $s(t)$ et V ?

3- Montrer que le vecteur accélération du point M dans le repère $\mathfrak{R}$ est donné par : $\vec{\gamma}(M) = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} + \frac{V^2}{R}\vec{n}$

R_c étant le rayon de courbure de la trajectoire (C) au point M.

4- Exprimer R_c en fonction de $\vec{V}(M/R)$ et $\vec{\gamma}(M)$.

Correction de l'exercice N°2

1- La signification des vecteurs $\vec{\tau}$, , $\vec{n}$ et $\vec{b}$

$\vec{\tau}$: Vecteur unitaire tangent à la trajectoire en M et de même sens que le mouvement

$\vec{n}$: Vecteur unitaire normal à la trajectoire en M et dirigé vers le centre de la courbure

$\vec{b}$: Vecteur unitaire ⊥ au plan qui contient les deux vecteurs $\vec{\tau}$ et $\vec{n}$.

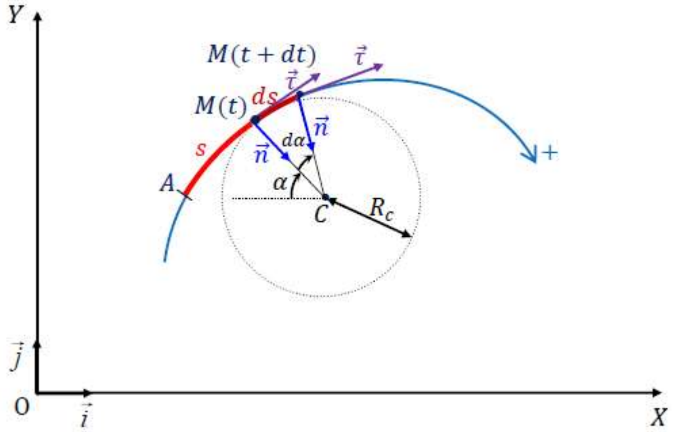
2- La relation qui existe entre (t) et .

$$V = \frac{ds}{dt}$$

3- Montrons que le vecteur accélération du point M dans le repère $\mathfrak{R}$ est donné par : $\vec{\gamma}(M) = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} + \frac{V^2}{R}\vec{n}$.

On a : $\vec{V}(M/R) = V\vec{\tau} \quad \Longrightarrow \quad \vec{\gamma}(M) = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} + V\frac{d\vec{\tau}}{dt}$

Reste à chercher $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$. Pour cet effet, on va considérer un point matériel en mouvement sur une trajectoire curviligne contenue dans le plan (xOy):



De sa part, le terme $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$ peut s'écrire sous la forme : $\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{d\alpha}\frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{dt}$ Et comme $ds = R_c\, d\alpha$ et $\frac{d\vec{\tau}}{d\alpha} = \vec{n}$ et $\frac{ds}{dt} = V$

On obtient alors : $\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{V}{R_c}\vec{n}$

Par conséquent : $\vec{\gamma}(M) = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} + \frac{V^2}{R}\vec{n}$

4- Exprimons R_c en fonction de $\vec{V}(M/R)$ et $\vec{\gamma}(M)$

On a : $\vec{V}(M/R) = V\vec{\tau}$ et $\vec{\gamma}(M) = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} + V\frac{d\vec{\tau}}{dt}$

$$\Longrightarrow \quad \vec{V}(M/R) \wedge \vec{\gamma}(M) = \frac{V^3}{R_c}\vec{b} \qquad (\text{car } \vec{\tau} \wedge \vec{n} = \vec{b})$$

$$\Rightarrow \qquad \left\|\vec{V}(M/R) \wedge \vec{\gamma}(M)\right\| = \frac{V^3}{R_c}$$

$$\Rightarrow \qquad R_c = \frac{V^3}{\left\|\vec{V}(M/R) \wedge \vec{\gamma}(M)\right\|}$$

Exercice N°3 : Mouvement elliptique

Soit un point M en mouvement dans le plan xOz d'un référentiel $R(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. L'équation paramétrique du mouvement est : $x(t) = 2cos\omega t$ et $y(t) = 3sin\omega t$

1- Trouver la nature de la trajectoire.

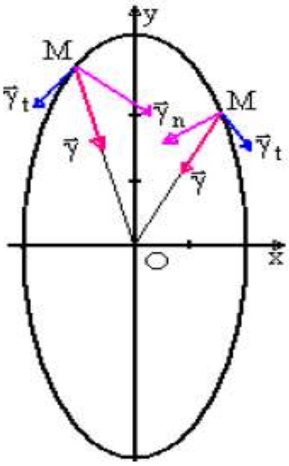
2- Ecrire les vecteurs position, vitesse et accélération du point M.

3- Tracer la trajectoire dans le plan xOy et préciser en un point d'abscisse positif puis en un autre point d'abscisse négatif le vecteur vitesse et le vecteur accélération de M. Tracer les accélérations normale et tangentielle en ces deux points.

Correction de l'exercice N°3 : Mouvement elliptique

1/ Equation de la trajectoire : $x(t) = 2cos\omega t$ et $y(t) = 3sin\omega t$ donne : $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$: trajectoire elliptique.

2/ Les vecteurs vitesse et accélération : $\vec{V}(M/R) = 2\omega sin\omega t\,\vec{\imath} + 3\omega cos\omega t\,\vec{\jmath}$ et $\vec{\gamma}(M/R) = -2\omega^2 cos\omega t\,\vec{\imath} - 3\omega^2 sin\omega t\,\vec{\jmath} = \omega^2\,\overrightarrow{OM}$



M(x,y) : si x > 0 l'accélération tangentielle est parallèle et de sens contraire à la vitesse : le mouvement est retardé. Dans le cas contraire, x < 0, l'accélération tangentielle est parallèle et de même sens que la vitesse : le mouvement est elliptique accéléré.

Exercice N°4 : La ronde d'un poisson rouge

Un poisson rouge se promène dans son bocal. Le mouvement de son centre d'inertie M dans un repère orthonormal $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\,)$ est décrit par les équations paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = Rcos(\omega t) \\ y(t) = Rsin(\omega t) \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

(ω et R désignent deux constantes positives)

1. Etablir l'équation paramétrique de la trajectoire du centre d'inertie du poisson et préciser sa nature.

2. Déterminer le vecteur vitesse correspondant (cartésienne).

Calculer sa norme. Quelle caractéristique le mouvement présente-t-il et que représente la constante ω ?

3. Etablir une relation simple entre les vecteurs position $\overrightarrow{OM}$ et accélération $\vec{\gamma}$ (toujours en cartésienne)

4. Refaire tous ces calculs en coordonnées polaires : trouver les expressions de r et de θ, puis de $\vec{V}$ et de $\vec{\gamma}$ et la relation entre $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{\gamma}$.

5. Las d'effectuer toujours le même trajet, le poisson décide d'ajouter une petite composante verticale $z(t) = v\,t$ au mouvement précédent (v_0 est une constante positive).

Quelle est alors la nature du mouvement du centre d'inertie du poisson ?

6. Et si il rajoute une composante $z(t) = z_0\,cos\,\omega zt$?

Quelle est la nature du mouvement ?

Correction de l'exercice N°4 : La ronde d'un poisson rouge

1. On élimine t : $\boxed{x^2 + y^2 = R}$ → Cercle de rayon R, centre O.

2. Vitesse $\vec{v}(M/\Re) = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}_{CART} = \begin{bmatrix} -\omega R \sin \omega t \\ \omega R \cos \omega t \end{bmatrix}_{CART}$

Norme : $\boxed{\|\vec{v}(M/\Re)\| = \sqrt{v_x^{\,2} + v_y^{\,2}} = \omega R}$ → Mvt Uniforme

Ω représente la vitesse angulaire de rotation

3. Accélération $\boxed{\vec{a}(M/\Re) = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix}_{CART} = \begin{bmatrix} -\omega^2 R \cos \omega t \\ -\omega^2 R \sin \omega t \end{bmatrix}_{CART} = -\omega^2 \overrightarrow{OM}}$

4. En polaire $\begin{cases} r = R \\ \theta = \omega t \end{cases} \Rightarrow \vec{v}(M/\Re) = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{bmatrix}_{POL} = \begin{bmatrix} 0 \\ R\omega \end{bmatrix}_{POL}$

Et $\boxed{\vec{a}(M/\Re) = \begin{bmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{bmatrix}_{POL} = \begin{bmatrix} -R\omega^2 \\ 0 \end{bmatrix}_{POL} = -\omega^2 \overrightarrow{OM}}$

5. Avec une composante linéaire suivant z, il fait un mouvement hélicoïdal

6. Avec une composante alternative, il faut la représenter : une sinusoïde enroulée sur un cylindre.

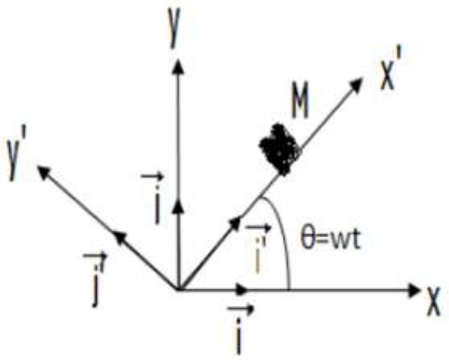
Exercice N°5

Dans le plan **xOy**, une droite **Ox′** tourne autour de **Oz** avec une vitesse angulaire constante. Un mobile **M** se déplace sur la droite **Ox′** suivant la loi : **r = a sin θ** avec **θ = ωt** et **a = cte**.

1. Déterminer à l'instant **t** en fonction de **a** et **ω**, la vitesse relative et la vitesse d'entraînement de **M** par leurs projections dans le repère mobile **x′Oy′**. En déduire la vitesse absolue exprimée dans cette même base de projection, et montrer que le module de celle-ci est constant.

2. Déterminer à l'instant t en fonction de **a** et **ω**, l'accélération relative, l'accélération d'entraînement et l'accélération complémentaire de **M** par leurs projections dans le repère mobile **x′Oy′**. En déduire l'accélération absolue exprimée dans cette même base de projection, et montrer que le module de celle-ci est constant.

Correction de l'exercice N°5



1- $\vec{V}_r = \left.\frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{R\prime} = a\,\omega cos\omega t\,\vec{\imath}'$

$$\vec{V}_e = \left.\frac{d\,\overrightarrow{OO}}{dt}\right)_R + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \omega\vec{k} \wedge \overrightarrow{OM} = a\omega cos\omega t\,\vec{\jmath}'$$

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e = a\,\omega cos\omega t\,\vec{\imath}' + a\omega cos\omega t\,\vec{\jmath}'$$

On écrit de la façon suivante les vecteurs unitaires

$\vec{\imath}' = cos\omega t\,\vec{\imath} + \sin\omega t\,\vec{\jmath}$ et $\vec{\jmath}' = -sin\omega t\,\vec{\imath} + \cos\omega t\,\vec{\jmath}$

Si on remplace ces expressions dans la vitesse absolue :

$$\vec{V}_a = a\,\omega cos\omega t\,(cos\omega t\,\vec{\imath} + \sin\omega t\,\vec{\jmath}) + a\omega cos\omega t\,(-sin\omega t\,\vec{\imath} + \cos\omega t\,\vec{\jmath})$$

$$\vec{V}_a = a\,\omega(cos\omega t\,cos\omega t - \sin\omega t \sin\omega t)\,\vec{\imath} + (cos\omega t \sin\omega t + sin\omega t\,\cos\omega t)\,\vec{\jmath})$$

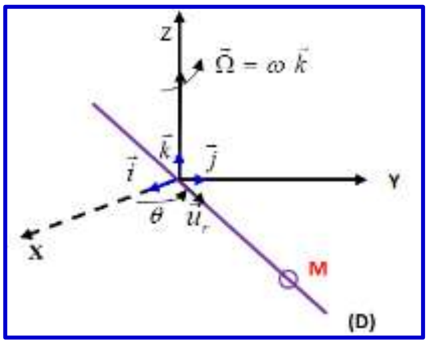
2- $\vec{\gamma}_r = \left.\frac{d^2\,\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_{R\prime} = -a\,\omega^2 sin\omega t\,\vec{\imath}'$

$$\vec{\gamma}_e = \omega\vec{k} \wedge (\omega\vec{k} \wedge \overrightarrow{OM}) = -a\,\omega^2 sin\omega t\,\vec{\imath}'$$

$$\vec{\gamma}_c = 2(\omega\vec{k} \wedge \vec{V}_r) = 2a\,\omega^2 cos\omega t\,\vec{\jmath}'$$

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c = -2a\,\omega^2 sin\omega t\,\vec{\imath}' + 2a\,\omega^2 cos\omega t\,\vec{\jmath}'$$

Exercice N°6



Un anneau de faibles dimensions, assimilable à un point matériel M de masse m, glisse sans frottement sur une tige rigide (D) la tige (d) tourne autour de l'axe (Oz) avec la vitesse angulaire $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, ou θ représente un angle orienté $(\vec{\imath}\,,\overrightarrow{u_r})$ et $\overrightarrow{u_r}$ est un vecteur unitaire de (D) (Voir figure).

Le mouvement du point M sur la droite (D) est décrit par l'équation horaire :

$r = r_0(1+\sin\omega t)$, ou r_0 est constante positive et $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r}$.

On appelle mouvement relatif de M son mouvement sur la droite (D), et mouvement absolu son mouvement par rapport au repère $(O,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k})$.Déterminer pour M, dans la base $(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta})$.

1- La vitesse et l'accélération relatives.
2- La vitesse et l'accélération d'entrainement.
3- L'accélération de Coriolis.

Correction de l'exercice N°6

1- La vitesse et l'accélération relatives : $\vec{V}_r = \left.\frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{\vec{u}_r} = r_0\,\omega cos\omega t\,\vec{u}_r$

$$\vec{\gamma}_r = \left.\frac{d\,\vec{V}_r}{dt}\right)_{\vec{u}_r} = -\,r_0\omega^2 \sin\omega t\,\vec{u}_r$$

2- La vitesse et l'accélération d'entrainement :

$$\vec{V}_e = \left.\frac{d\,\overrightarrow{OO}}{dt}\right)_R + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM} = \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM} = \omega\vec{k}\wedge r_0(1+\sin\omega t)\vec{u}_r = r_0\omega(1+\sin\omega t)\vec{u}_\theta$$

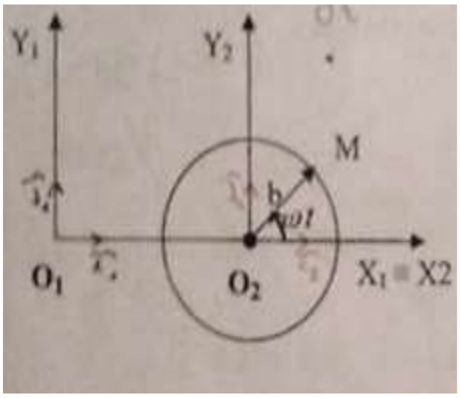
Autre méthode : $\vec{V}_e = \left.\frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{\vec{u}_r}^{M\,fixe\,dans\,le\,rep\grave{e}re\,relatif} = r_0\omega(1+\sin\omega t)\vec{u}_\theta$

$$\vec{\gamma}_e = \omega\vec{k}\wedge\left(\omega\vec{k}\wedge\overrightarrow{OM}\right) = \omega\vec{k}\wedge\left(r_0\omega(1+\sin\omega t)\vec{u}_\theta\right) = -\,r_0\omega^2(1+\sin\omega t)\vec{u}_r$$

3- L'accélération de Coriolis : $\vec{\gamma}_c = 2\left(\omega\vec{k}\wedge\vec{V}_r\right) = -\,2r_0\,\omega^2 cos\omega t\,\vec{k}\wedge\vec{u}_r = -\,2r_0\,\omega^2 cos\omega t\,\vec{u}_\theta$

Exercice N°7

On considère le repère fixe $R_1(O_1, X_1, Y_1, Z_1)$ orthonormé direct, et le référentiel relatif $R_2(O_2, X_2, Y_2, Z_2)$ muni d'une base $(\vec{\imath_2}, \vec{\jmath_2}, \vec{k_2})$ orthonormée directe. Le repère R_2 est en mouvement de translation rectiligne tel qu'à chaque instant t : $\overrightarrow{O_1O_2} = \frac{1}{2}at^2\,\vec{\imath_2}$ (a est une constante positive). Une particule M est repérée dans R_2 par son vecteur position $\overrightarrow{O_2M} = bcos\omega t\,\vec{\imath_2} + bsin\omega t\,\vec{\jmath_2}$ (b et ω sont des constantes positives).



Déterminer dans la base $(\vec{\imath_2}, \vec{\jmath_2}, \vec{k_2})$

1- La vitesse relative $\vec{V_r}$ et l'accélération relative $\vec{\gamma_r}$ de M.
2- La vitesse d'entrainement $\vec{V_e}$ de M.
3- les accélérations d'entrainement $\vec{\gamma_e}$ et de coriolis $\vec{\gamma_c}$.
4- En déduire la vitesse absolue $\vec{V_a}$ et l'accélération absolue $\vec{\gamma_a}$.
5- Que peut-on dire des accélérations $\vec{\gamma}(M/R_1)$ et $\vec{\gamma}(M/R_2)$ dans le cas où la translation de R_2 par rapport à R_1 est uniforme ? Conclure.

Correction de l'exercice N°7

$\overrightarrow{O_1O_2} = \frac{1}{2}at^2\,\vec{\imath_2}$, $\overrightarrow{O_2M} = bcos\omega t\,\vec{\imath_2} + bsin\omega t\,\vec{\jmath_2}$ avec b et ω > 0

1-

- La vitesse relative $\vec{V_r}$ dans la base $(\vec{\imath_2}, \vec{\jmath_2}, \vec{k_2})$

$$\vec{V_r}(M) = \frac{d(bcos\omega t)}{dt}\vec{\imath_2} + bcos\omega t\left.\frac{d\vec{\imath_2}}{dt}\right|_{R_2} + \frac{d(bsin\omega t)}{dt}\vec{\jmath_2} + bsin\omega t\left.\frac{d\vec{\jmath_2}}{dt}\right|_{R_2}$$

$$\vec{V_r}(M) = \frac{d(bcos\omega t)}{dt}\vec{\imath_2} + \vec{0} + \frac{d(bsin\omega t)}{dt}\vec{\jmath_2} + \vec{0}$$

$$\vec{V_r}(M) = -b\omega sin\omega t\,\vec{\imath_2} + b\omega cos\omega t\vec{\jmath_2}$$

- L'accélération relative $\vec{\gamma_r}$ de M. $\vec{\gamma_r} = \frac{d\vec{V_r}(M)}{dt} = -b\omega^2 cos\omega t\,\vec{\imath_2} - b\omega^2 cos\omega t\vec{\jmath_2}$

Donc : $\vec{\gamma_r} = \frac{d\vec{V_r}(M)}{dt} = -\omega^2(bcos\omega t\,\vec{\imath_2} + bcos\omega t\vec{\jmath_2}) = -\,\omega^2\,\overrightarrow{OM}$

② La vitesse d'entraînement $\vec{V_e}$:

$\vec{V_e} = \frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}/_{R_1} + \vec{\omega}(R_2/R_1)\wedge\overrightarrow{O_2M}$ avec $\vec{\omega}(R_2/R_1) = \vec{0}$ car, pas de rotation de R_2/R_1

$\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}/_{R_1} = at\,\vec{\imath_2}$ et $\frac{d\vec{\imath_2}}{dt}/_{R_1} = \vec{0}$

$\boxed{\vec{V_e} = at\,\vec{\imath_2}}$

③ * Les accélérations d'entrainement γ_e :

$$\vec{\gamma_e} = \frac{d^2\vec{O_1O_2}}{dt^2}/_{R_1} + \underbrace{\frac{d\vec{\omega}(R_2/R_1)}{dt}\wedge\vec{O_2M}}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{O_2M})}_{\vec{0}}$$

$$\boxed{\vec{\gamma_e} = a\vec{i_2}}$$

* Les accélérations de Coriolis $\vec{\gamma_c}$:

$$\vec{\gamma_c} = 2\vec{\omega}\wedge\vec{V_r} \Longrightarrow \boxed{\vec{\gamma_c} = \vec{0}}$$

④ * La vitesse absolue $\vec{V_a}$:

$$\vec{V_a} = \vec{V_r} + \vec{V_e} \Longrightarrow \boxed{\vec{V_a} = (at - b\omega\sin\omega t)\vec{i_2} + b\omega\cos\omega t\,\vec{j_2}}$$

* L'accélération absolue $\vec{\gamma_a}$:

$$\vec{\gamma_a} = \vec{\gamma_r} + \vec{\gamma_e} + \vec{\gamma_c}$$

$$\boxed{\vec{\gamma_a} = (a - b\omega^2\cos\omega t)\vec{i_2} - b\omega^2\sin\omega t\,\vec{j_2}}$$

⑤ La translation de R_2 par rapport à R_1 est uniforme

C.à.d $\vec{V}(R_2/R_1) = cte \Longrightarrow \vec{V}(R_2/R_1) = \vec{cte}$ $\qquad \vec{\gamma}(M/R_1) = \vec{\gamma_a}(M)$

$\Longrightarrow \frac{d\vec{O_1O_2}}{dt} = \underset{=\vec{V_a}(O_2)}{\vec{cte}} \Longrightarrow \frac{d^2\vec{O_1O_2}}{dt^2} = \vec{0}$ $\qquad \vec{\gamma}(M/R_2) = \vec{\gamma_r}(M)$

$\Longrightarrow \vec{\gamma_e} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{\gamma_a} = \vec{\gamma_r} \Longrightarrow \boxed{\vec{\gamma}(M/R_1) = \vec{\gamma}(M/R_2)}$

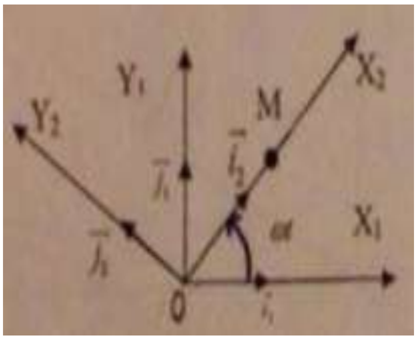
Donc les 2 accélérations sont identiques.

Exercice N°8

On considère un repère absolu $R_1(O_1, X_1, Y_1, Z_1)$ de base orthonormé directe $(\vec{\imath_1}, \vec{\jmath_1}, \vec{k_1})$, et un repère relatif $R_2(O_2, X_2, Y_2, Z_1)$ de la base $(\vec{\imath_2}, \vec{\jmath_2}, \vec{k_1})$ orthonormée directe.

L'axe $\overrightarrow{OX_2}$ tourne autour de $\overrightarrow{OZ}$ avec une vitesse angulaire ω constante ($\vec{\omega} = \omega\vec{\imath_1}$)

La position d'une particule M sur l'axe $\overrightarrow{OX_2}$ est donnée par $\overrightarrow{OM} = acos\omega t\,\vec{\imath_2}$ (a est une constante positive).



1 – Dans la base $(\vec{\imath_2}, \vec{\jmath_2}, \vec{k_1})$, exprimer :

1- 1- La vitesse relative $\vec{V_r}$ et l'accélération relative $\vec{\gamma_r}$ de M.

1- 2- La vitesse d'entrainement $\vec{V_e}$ et accélération d'entrainement $\vec{\gamma_e}$.

1- 3- L'accélération de coriolis $\vec{\gamma_c}$.

1- 4- La vitesse absolue $\vec{V_a}$ et l'accélération absolue $\vec{\gamma_a}$.

2- Dans la base $(\vec{\imath_1}, \vec{\jmath_1}, \vec{k_1})$, déterminer les coordonnées x_1 et y_1 de M.

En déduire l'équation de la trajectoire de M dans R_1. Quelle est la nature de cette trajectoire ?

On donne : $cos^2\omega t = \frac{1+cos2\omega t}{2}$ et $cos\omega t \times sin\omega t = \frac{sin2\omega t}{2}$.

Correction de l'exercice N°8

1) a- Le mouvement de M dans R_2 est rectiligne sinusoïdal.

on a $\vec{OM} = a\cos\omega t\,\vec{i_2}$ et $\vec{\omega} = \omega\vec{k_1}$

$$\boxed{\vec{V_r}(M) = \frac{d\vec{OM}}{dt}/_{R_2} = -a\omega\sin\omega t\,\vec{i_2}}$$

* L'accélération relative $\vec{\gamma_r}$:

$$\vec{\gamma_r}(M) = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}/_{R_2} = \frac{d\vec{V_r}(M)}{dt}/_{R_2}$$

donc $\boxed{\vec{\gamma_r} = -a\omega^2\cos\omega t\,\vec{i_2}}$

b- *La vitesse d'entraînement $\vec{V_e}$:

$$\vec{V_e}(M) = \underbrace{\frac{d\vec{OO}}{dt}\Big/_{R_1}}_{0} + \vec{\omega}(R_2/R_1)\wedge\vec{OM}$$

$$\vec{V_e}(M) = \omega\vec{k_1}\wedge a\cos\omega t\,\vec{i_2}$$

$$\vec{V_e}(M) = a\omega\cos\omega t\,\vec{k_1}\wedge\vec{i_2}$$

donc $\boxed{\vec{V_e}(M) = a\omega\cos\omega t\,\vec{j_2}}$

*L'accélération d'entraînement :

$$\vec{\gamma_e}(M) = \underbrace{\frac{d^2\vec{OO}}{dt^2}\Big/_{R_1}}_{0} + \underbrace{\frac{d\vec{\omega}(R_2/R_1)}{dt}}_{0} + \vec{\omega}(R_2/R_1)\wedge\left(\vec{\omega}(R_2/R_1)\wedge\vec{OM}\right)$$

$$\vec{\gamma_e}(M) = \omega\vec{k_1}\wedge(\omega\vec{k_1}\wedge a\cos\omega t\,\vec{i_2}) = a\omega^2\cos\omega t\,\vec{k_1}\wedge(\underbrace{\vec{k_1}\wedge\vec{i_2}}_{\vec{j_2}})$$

$$\boxed{\vec{\gamma_e}(M) = -a\omega^2\cos\omega t\,\vec{i_2}}$$

C- L'accélération de Coriolis $\vec{\gamma_c}$:

$$\vec{\gamma_c}(M) = 2\vec{\omega}(R_2/R_1)\wedge\vec{V_r}(M) = 2\omega\vec{k_1}\wedge(-a\omega\sin\omega t\,\vec{i_2})$$

donc $\boxed{\vec{\gamma_c}(M) = -2a\omega^2\sin\omega t\,\vec{j_2}}$

d- *La vitesse absolue $\vec{V_a}$:

$$\vec{V_a}(M) = \vec{V_r}(M) + \vec{V_e}(M) = -a\omega\sin\omega t\,\vec{i_2} + a\cos\omega t\,\vec{j_2}$$

donc $\boxed{\vec{V_a} = -a\omega\sin\omega t\,\vec{i_2} + a\cos\omega t\,\vec{j_2}}$

*L'accélération absolue $\vec{\gamma_a}$:

$$\vec{\gamma_a}(M) = \vec{\gamma_r}(M) + \vec{\gamma_e}(M) + \vec{\gamma_c}(M)$$

$$\vec{\gamma_a}(M) = -a\omega^2\cos\omega t\,\vec{i_2} - a\omega^2\cos\omega t\,\vec{i_2} - 2a\omega^2\sin\omega t\,\vec{j_2}$$

donc $\boxed{\vec{\gamma_a}(M) = -2a\omega^2\cos\omega t\,\vec{i_2} - 2a\omega^2\sin\omega t\,\vec{j_2}}$

2) Dans R_2 on a : $\vec{OM} = a\cos\omega t\,\vec{i_2}$

$\vec{i_2} = \cos\omega t\,\vec{i_1} + \sin\omega t\,\vec{j_1}$

Dans R_1 on a : $\vec{OM} = a\cos^2\omega t\,\vec{i_1} + a\cos\omega t\sin\omega t\,\vec{j_1} = x_1\vec{i_1} + y_1\vec{j_1}$

d'où $M\begin{cases} x_1 = a\cos^2\omega t = a\left(1 + \dfrac{\cos 2\omega t}{2}\right) \\ y_1 = a\cos\omega t\sin\omega t = a\left(\dfrac{\sin 2\omega t}{2}\right) \\ z_1 = 0 \end{cases}$

donc $\begin{cases} x_1 = \dfrac{a}{2} + \dfrac{a}{2}\cos 2\omega t \\ y_1 = \dfrac{a}{2}\sin 2\omega t \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 - \dfrac{a}{2} = \dfrac{a}{2}\cos 2\omega t \\ y_1 = \dfrac{a}{2}\sin 2\omega t \end{cases}$

$$\left(x_1 - \frac{a}{2}\right)^2 + y_1^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2\underbrace{(\cos^2 2\omega t + \sin^2 2\omega t)}_{=1}$$

$\boxed{\left(x_1 - \dfrac{a}{2}\right)^2 + y_1^2 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2}$ Equation de la trajectoir dans R_1

c'est 1 cercle de centre : $C\left(\dfrac{a}{2} ; 0 ; 0\right)$ et $R = \dfrac{a}{2}$