

Chapitre III

Mécanique de Hamilton

Ce que nous avons vu du formalisme lagrangien suffit amplement à traiter l'ensemble des problèmes de la mécanique classique (et relativiste). L'approche de Hamilton, que nous allons développer dans la suite du cours, n'apporte rien de nouveau du point de vue du contenu physique. Mais elle offre un cadre théorique puissant, permettant une interprétation géométrique de la mécanique. C'est dans ce cadre que s'est développée la mécanique quantique et la physique moderne (en particulier la théorie des champs) et c'est dans ce cadre également que s'étudient tous les phénomènes de chaos.

I- ESPACE DES PHASES

Dans la théorie des équations de Lagrange, les variables étaient les n coordonnées généralisées $\{q_k\}$ du *point représentatif du système (S) matériel* dans l'espace de configuration E_n . Les n équations différentielles du 2^{ème} ordre relatives à ces variables formaient alors les équations de mouvements.

Dans la théorie d'Hamilton, on s'intéresse plutôt à l'état mécanique du système, lequel dépend de $2n$ variables indépendantes : les n coordonnées $\{q_k\}$ de l'espace de configuration E_n et les n moments, généralisés, conjugués $\{p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\}$.

On appelle espace des phases l'espace à $2n$ dimensions dans lequel un point figuratif représente *l'état mécanique du système*. Ce nombre de variables coïncide évidemment avec le nombre des conditions initiales qui caractérisent l'état initial du système : généralement n paramètres de position q_k et n paramètres de quantité de mouvement p_k .

On parle de formalisme Lagrangien lorsque nous travaillons, avec $(q_k, \dot{q}_k, t)$, dans l'e.V de *configuration* E_n dont $\{q_k\}$ sont les coordonnées généralisées de cette espace.

On parle de formalisme Hamiltonien lorsque nous travaillons, avec (q_k, p_k, t) , dans *l'espace de phase* $\{q_k, p_k\}$ ie l'e.V de configuration E_{2n} .

II- Transformation de Legendre

La transformation de Legendre permet d'exprimer une fonction grâce à l'enveloppe de ses tangentes.

1- Equation de la tangente en un point d'une courbe.

Soit $M(x_M, y_M)$ un point d'une courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = f(x)$. Cherchons l'équation de la droite tangente à $\mathcal{C}$ au point M, autrement dit cherchons les paramètres a et b de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = ax + b$:

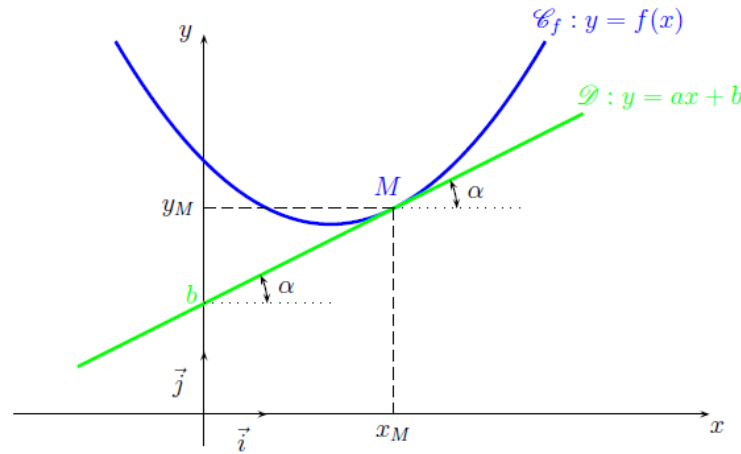


Figure 3. 1 : Tangente à une courbe

Par définition, la dérivée de la fonction f au point M est égale à la tangente de l'angle α que fait la droite D au point M avec l'horizontale :

$$f'(x_M) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_M + h) - f(x_M)}{h} = \tan \alpha$$

Au point $M(x_M, y_M)$ l'équation de la tangente s'écrit,

$$y_M = ax_M + b$$

Si bien que,

$$a = \frac{y_M - b}{x_M} = \tan \alpha = f'(x_M)$$

Et

$$b = y_M - ax_M = f(x_M) - ax_M = f(x_M) - f'(x_M)x_M \quad (3.1)$$

Ayant les deux paramètres a et b , nous pouvons écrire l'équation de la tangente en M :

$$y = f'(x_M) x + f(x_M) - f'(x_M)x_M$$

2- Equation de l'enveloppe.

Cherchons l'équation de toutes les tangentes, c'est à dire, b en fonction de a . Pour cela nous repartons de l'équation (3.1) :

$$b(a) = f(x_M) - ax_M$$

Le point M parcourt maintenant toute la courbe $\mathcal{C}$, et x_M devient une variable. La transformée de Legendre de $f(x)$ est donc la fonction $b(a)$ telle que :

$$b(a) = f(x) - ax \quad (3.2)$$

Comme a est la nouvelle variable, il nous reste à exprimer $f(x)$ et x en fonction de a . Pour cela il nous faut l'expression explicite de la fonction f .

Exemple 1.

Trouver la transformée de Legendre de $f(x) = x^2$. La nouvelle variable a s'écrit,

$$a = f'(x) = 2x$$

soit,

$$x = \frac{a}{2}$$

On exprime $f(x)$ en fonction de a :

Soit ,

$$f(x) = x^2 = \frac{(2x)^2}{4} = \frac{a^2}{4}$$

La transformée de Legendre de $f(x)$ est alors la fonction $b(a)$ donnée par la relation (3. 2):

$$b(a) = f(x) - a x = \frac{a^2}{4} - a \times \frac{a}{2} = -\frac{a^2}{4}$$

On retiendra que dans toute transformation de Legendre, la nouvelle variable a est la dérivée de la fonction de départ $f(x)$ par rapport à l'ancienne variable x .

3- Involution de la transformation de Legendre.

Si l'on applique deux fois la transformation de Legendre, on retombe sur la fonction de départ. En effet, la transformée de Legendre de la fonction $f(x)$ est donnée par :

$$b(a) = f(x) - a x$$

Si l'on applique de nouveau la transformation de Legendre, la nouvelle variable, notée n , est telle que,

$$n = \frac{db(a)}{da} = \frac{db(x)}{da} - x - a \frac{dx}{da}$$

et la transformée de Legendre de $b(a)$ est la fonction $g(n)$ telle que :

$$\begin{aligned} g(n) &= b(a) - n a = f(x) - a x - \left[\frac{df(x)}{da} - x - a \frac{dx}{da} \right] a = f(x) - \left[\frac{df(x)}{da} - \frac{df(x)}{dx} \frac{dx}{da} \right] a \\ &= f(x) \end{aligned}$$

On en conclue que la transformation de Legendre ne perd ni n'ajoute d'information à la fonction de départ.

Exemple 2

Poursuivons le premier exemple, et cherchons la transformée de Legendre de $b(a) = -a^2/4$. La nouvelle variable n s'écrit,

$$n = b'(a) = -\frac{a}{2}$$

Soit,

$$a = -2n$$

On exprime $b(a)$ en fonction de n :

$$b(a) = -\frac{a^2}{4} = -n^2$$

La transformée de Legendre de $b(a)$ est alors :

$$g(n) = b(a) - n a = -n^2 + 2n^2 = n^2$$

On retrouve la propriété d'involution de la transformée de Legendre.

III- Equations de Hamilton

1- Introduction de nouvelles variables indépendantes.

Les n équations de Lagrange sont des équations différentielles du second ordre par rapport au temps. N'importe quelle équation différentielle du second ordre peut être remplacée par deux équations différentielles du premier ordre, en introduisant une nouvelle variable indépendante.

Exemple 3 : Soit à résoudre l'équation différentielle suivante : $\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$

Nous pouvons poser $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$, et nous avons alors les deux équations différentielles suivantes à résoudre :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} \end{cases}$$

Ces équations différentielles sont résolues indépendamment l'une de l'autre, et les variables $\mathbf{v}$ et $\dot{\mathbf{v}}$ sont donc traitées comme indépendantes :

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \mathbf{C}_1 \\ \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} \\ \mathbf{x} = \mathbf{C}_1 \mathbf{t} + \mathbf{C}_2 \end{cases}$$

Appliquons cette remarque aux équations de Lagrange :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{v}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = 0 \\ v_i = \dot{q}_i \end{cases}$$

où le Lagrangien devient une fonction des nouvelles variables $\mathbf{v}_j$.

Peut-on simplifier l'écriture des équations de Lagrange ?

Nous avons,

$$d \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t)}{\partial \dot{v}_i} \right] = \sum_{\alpha=1}^n \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{v}_\alpha \partial \dot{v}_i} d\dot{v}_i + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q_\alpha \partial \dot{v}_i} dq_\alpha \right) + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial t \partial \dot{v}_i} dt = 0$$

D'où la dérivée totale par rapport au temps :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t)}{\partial \dot{v}_i} \right] = \sum_{\alpha=1}^n \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{v}_\alpha \partial \dot{v}_i} \dot{v}_i + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q_\alpha \partial \dot{v}_i} \dot{q}_\alpha \right) + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial t \partial \dot{v}_i} = 0$$

Nous obtenons finalement le système d'équations différentielles du premier ordre suivant :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \begin{cases} \sum_{\alpha=1}^n \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{v}_\alpha \partial \dot{v}_i} \dot{v}_i + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q_\alpha \partial \dot{v}_i} \dot{q}_\alpha \right) + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial t \partial \dot{v}_i} - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = 0 \\ v_i = \dot{q}_i \end{cases}$$

L'introduction des nouvelles variables v_i n'apporte pas de simplification.

2- Transformée de Legendre des $\dot{q}_i$

Dans les n équations de Lagrange, $\forall i = 1, \dots, n$

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \right) = 0$$

apparaissent les dérivées partielles du Lagrangien par rapport aux vitesses généralisées : $\partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}_i$. Cela suggère d'effectuer une transformation de Legendre du Lagrangien pour les vitesses généralisées $\dot{q}_i$, en posant :

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$$

Les équations de Lagrange deviennent le système suivant :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} p_i - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \right) = 0 \\ p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \end{cases}$$

Soit,

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \begin{cases} \dot{p}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} & (3.3) \\ p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} & (3.4) \end{cases}$$

D'après la définition **des impulsions généralisées**, les n nouvelles variables sont les impulsions généralisées p_i . La première relation est l'équation de la dynamique.

La seconde correspond à la création des nouvelles variables pour la transformation de Legendre du Lagrangien. Par rapport aux relations obtenues au paragraphe 1 précédent, on remarque leur grande simplicité.

Les n équations différentielles (3. 3) sont résolues indépendamment des n équations différentielles (3. 4), les variables p_i et q_i sont donc traitées comme étant indépendantes l'une de l'autre.

3- Expression du Hamiltonien

Il nous reste à effectuer la transformation de Legendre du lagrangien.

Commencions par ne transformer que la première vitesse généralisée $\dot{q}_1$, et notons $\mathcal{H}_1$ la transformée de Legendre du Lagrangien :

$$\mathcal{H}_1(q, p_1, p_2, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) = \mathcal{L} - p_1 \dot{q}_1$$

Transformons maintenant la deuxième vitesse généralisée $\dot{q}_2$:

$$\mathcal{H}_2(q, p_1, p_2, \dot{q}_3, \dots, \dot{q}_n, t) = \mathcal{H}_1 - p_2 \dot{q}_2 = \mathcal{L} - p_1 \dot{q}_1 - p_2 \dot{q}_2$$

Si l'on transforme toutes les vitesses généralisées, nous avons :

$$\mathcal{H}_n(q, p, t) = \mathcal{L} - \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i$$

Nous posons alors la définition suivante (le signe de la transformation de Legendre est affaire de convention) :

Définition 1. Hamiltonien

La fonction des n coordonnées généralisées $\mathbf{q}_i$, des n impulsions généralisées $\mathbf{p}_i$, et du temps t :

$$\mathcal{H}(q, p, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$$

est appelée fonction de Hamilton ou Hamiltonien.

$\dot{q}_i$ sera exprimée en fonction de $\mathbf{p}_i$, en inversant la définition des impulsions généralisées.

Remarque : Le Hamiltonien $\mathcal{H}(q, p, t)$ et la fonction énergie $\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ ont même valeur, mais elles ne s'expriment pas dans les mêmes variables.

4- Démonstration des équations de Hamilton

$$d\mathcal{H}(q, p, t) = \sum_{i=1}^n p_i d\dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \dot{q}_i dp_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

En se servant des relations (3.3) et (3.4)

$$\begin{aligned} d\mathcal{H}(q, p, t) &= \sum_{i=1}^n p_i d\dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \dot{q}_i dp_i - \sum_{i=1}^n \dot{p}_i dq_i - \sum_{i=1}^n p_i d\dot{q}_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \\ &= \sum_{i=1}^n \dot{q}_i dp_i - \sum_{i=1}^n \dot{p}_i dq_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \end{aligned}$$

Soit,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} dq_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} dp_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt \\ = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i dp_i - \sum_{i=1}^n \dot{p}_i dq_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \quad (3.5) \end{aligned}$$

Nous obtenons $2n$ équations, appelées équations canoniques de Hamilton (1827)

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \begin{cases} \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} & (3.6) \\ \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} & (3.7) \end{cases}$$

L'équation (3.7) ci-dessus et l'équation (3.4) sont transformées de Legendre l'une de l'autre. En effet, par involution de la transformation de Legendre, la transformée de Legendre de $\mathbf{p}_i$ est $\dot{q}_i$.

Ces équations sont donc équivalentes. Par conséquent, la première équation reste l'équation de la dynamique et la seconde correspond à nouveau à la création de la nouvelle variable pour la transformation de Legendre.

Les n équations différentielles (3. 6) sont résolues indépendamment des n équations différentielles (3. 7), les variables $\mathbf{p}_i$ et $\mathbf{q}_i$ sont donc traitées comme étant indépendantes l'une de l'autre.

Définition 2 : Variables canoniquement conjuguées

Les variables $\mathbf{q}_i$ et $\mathbf{p}_i$ sont dites canoniquement conjuguées, ou plus simplement, conjuguées.

L'impulsion généralisée $\mathbf{p}_i$ est aussi appelée moment conjugué de la coordonnée $\mathbf{q}_i$, ou plus simplement, moment conjugué.

On remarque la symétrie des équations de Hamilton, en particulier elles restent inchangées si l'on remplace $\mathbf{q}_i$ par $\mathbf{p}_i$ et $\mathbf{p}_i$ par $-\mathbf{q}_i$.

Exemple 4 : Masse glissant sans frottements sur un plan incliné Une masse m glisse sans frottements sur un plan incliné.

Quelle est l'équation de son mouvement ?

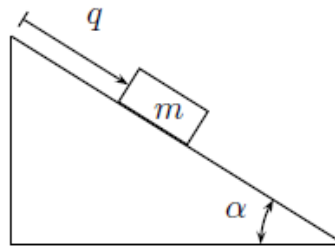


Figure 3. 2 : Masse glissant sans frottements sur un plan incliné

Dans l'exemple 1, nous avons trouvé l'expression suivante pour le Lagrangien :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + mgq \sin \alpha$$

Effectuons la transformation de Legendre du Lagrangien pour la vitesse généralisée $\dot{q}$. Le moment conjugué de la variable q a pour expression :

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m \dot{q} \quad (3. 8)$$

Relation que l'on inverse,

$$\dot{q} = \frac{p}{m}$$

Le Hamiltonien s'écrit :

$$\mathcal{H} = p \dot{q} - \mathcal{L} = \frac{p^2}{m} - \frac{p^2}{2m} - mgq \sin \alpha = \frac{p^2}{2m} - mgq \sin \alpha$$

Les équations de Hamilton s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \\ \dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \\ \dot{p} = mgsin\alpha \\ \dot{q} = \frac{p}{m} \end{cases}$$

La seconde équation est bien équivalente à l'équation (3. 8). Nous obtenons deux équations différentielles du premier ordre. En dérivant $\dot{q}$ par rapport au temps, nous obtenons l'équation différentielle du mouvement:

$$\ddot{q} = \frac{\ddot{p}}{m} \Rightarrow \ddot{q} = gsin\alpha$$

IV- Conservation du Hamiltonien

Les relations (3. 3) et (3. 6), ainsi que la comparaison des derniers termes de l'expression (3. 5), donnent les deux relations suivantes entre Hamiltonien et Lagrangien :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right)_{p_i, t} = - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \right)_{\dot{q}_i, t} & (3.9) \\ \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \right)_{q_i, p_i} = - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \right)_{q_i, \dot{q}_i} & (3.10) \end{cases}$$

Ecrivons la dérivée par rapport au temps du Hamiltonien et utilisons les équations de Hamilton :

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \sum_{i=1}^n -\dot{p}_i \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \dot{p}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \quad (3.11)$$

Si le Hamiltonien n'est pas une fonction explicite du temps, $\partial \mathcal{H} / \partial t = 0$, alors il est constant, $d\mathcal{H} / dt = 0$.

Avec la relation (3. 10),

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \quad (3.12)$$

De même, si le Lagrangien n'est pas une fonction explicite du temps, alors le Hamiltonien est constant.

V- Hamiltonien et énergie mécanique

Nous cherchons les conditions pour avoir :

$$\mathcal{H} = E$$

$$\sum_{i=1}^n \dot{q}_i \dot{p}_i - \mathcal{L} = T + V$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - (T - V) = T + V$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T \quad (3.13)$$

Si l'on suppose que le potentiel $V(q, t)$ n'est pas fonction des vitesses généralisées, la relation précédente devient :

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T$$

Cette relation n'est possible que si l'énergie cinétique est une fonction homogène quadratique (de rang 2) des vitesses généralisées :

$$T(\lambda \dot{q}_1, \dots, \lambda \dot{q}_n) = \lambda^2 T(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \quad (3.14)$$

En effet, nous avons alors :

$$\frac{\partial T}{\partial(\lambda \dot{q}_1)} d(\lambda \dot{q}_1) + \dots + \frac{\partial T}{\partial(\lambda \dot{q}_n)} d(\lambda \dot{q}_n) = d(\lambda^2 T)$$

$$\frac{\partial T}{\partial(\lambda \dot{q}_1)} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial T}{\partial(\lambda \dot{q}_n)} \dot{q}_n = \frac{d(\lambda^2 T)}{d\lambda}$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial(\lambda \dot{q}_i)} \dot{q}_i = 2\lambda T$$

En posant $\lambda = 1$, nous retrouvons :

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T \quad (3.15)$$

Ainsi, nous cherchons les conditions sur l'énergie cinétique qui impliquent (3.14), qui à son tour implique (3.15), donc $H = E$.

L'énergie cinétique a pour expression :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} v_{\alpha}^2$$

S'il existe une liaison rhéonome, le vecteur position dépend explicitement du temps :

$$\forall \alpha = 1, \dots, N \quad \vec{r}^{\alpha}(q_1, \dots, q_N, t)$$

$$\forall \alpha = 1, \dots, N \quad d\vec{r}^{\alpha} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial t} dt$$

et l'énergie cinétique s'écrit :

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial t} \right)^2 \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \left(\frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial t} \right)^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial t} \frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial q_i} \dot{q}_i \dot{q}_k
\end{aligned}$$

et n'est pas une fonction homogène quadratique des vitesses généralisées : $T(\lambda \dot{q}) \neq \lambda^2 T(\dot{q})$. S'il n'y a pas de contraintes rhéonomes, le vecteur position ne contient pas explicitement le temps,

$$\forall \alpha = 1, \dots, N \quad \vec{r}^{\alpha} = \vec{r}^{\alpha}(q)$$

$$\forall \alpha = 1, \dots, N \quad \frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial t} = 0$$

et l'énergie cinétique a pour expression :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial q_k} \dot{q}_i \dot{q}_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k$$

qui est bien une fonction homogène quadratique des vitesses généralisées :

$$T(\lambda \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n m_{\alpha} a_{ik} \lambda \dot{q}_i \lambda \dot{q}_k = \lambda^2 \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n m_{\alpha} a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k = \lambda^2 T(\dot{q})$$

Si le système est holonome scléronome et si le potentiel $V(q, t)$ ne dépend pas explicitement des vitesses généralisées, alors le Hamiltonien se confond avec l'énergie mécanique. Dans ce cas, l'énergie cinétique ne dépend pas explicitement du temps. La relation (3. 12) donne alors :

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} [T - V(q, t)] = \frac{\partial V(q, t)}{\partial t}$$

Si le potentiel ne dépend pas explicitement du temps $\partial V(q)/\partial t = 0$, le système est conservatif :

Et,

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \mathcal{H} = E = \text{Cste}$$

Si le potentiel $V(q, t)$ dépend explicitement du temps alors,

$$\mathcal{H} = E \neq \text{Cste}$$

Dans le cas où le système est rhéonome, nous pouvons avoir $\mathcal{H}$ constant, différent de l'énergie mécanique E .

Exemple 4.5 : Masse glissant sans frottements sur un plan incliné

Le Hamiltonien s'écrit :

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} - mgqsina$$

Le Hamiltonien n'est pas une fonction explicite du temps, donc il se conserve. Le potentiel n'est pas fonction des vitesses généralisées et les contraintes sont holonomes scléronomes, par conséquent $\mathcal{H} = E$.

VI- Coordonnées cycliques

La relation de passage (3. 9),

$$\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}\right)_{p_i, t} = - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\right)_{\dot{q}_i, t}$$

Montre que si une coordonnée n'apparaît pas dans le Lagrangien alors elle n'apparaît pas non plus dans le Hamiltonien. Cette coordonnée est dite cyclique.

Supposons que q_n soit une coordonnée cyclique. Le Lagrangien reste fonction de $\dot{q}_n$,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, \dots, q_{n-1}, \dot{q}, t)$$

L'équation de Lagrange (3. 3) donne :

$$\dot{p}_n = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_n} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_n = \text{Cste} = p_n(t=0) = \alpha$$

où la constante α est la valeur initiale de p_n . Le moment conjugué de toute coordonnée cyclique est une intégrale première du mouvement. La résolution complète du problème passe par la mécanique de Hamilton car elle utilise les moments conjugués p . Le Hamiltonien s'écrit :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(q_1, \dots, q_{n-1}, p_1, \dots, p_{n-1}, \alpha, t)$$

Le problème ne fait plus intervenir maintenant que $2n-2$ coordonnées et le temps. En intégrant l'équation de Hamilton (3. 7) :

$$\dot{q}_n = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \alpha}$$

Nous obtenons le comportement de la coordonnée cyclique.

VII- Théorème de Liouville

Soit S un système dynamique, nous dirons que l'ensemble des configurations de S constitue son espace de configuration. Un ensemble de paramètres $(q_1, \dots, q_n)$ pour le système S est alors un système de coordonnées pour l'espace de configuration.

L'espace des phases est un espace cartésien à $2n$ dimensions, dont les q_i et les p_i sont les coordonnées. Le sous-espace des q_j est l'espace des configurations, le sous-espace des p_j est appelé espace des moments.

A chaque instant, tout système dynamique est représenté par un unique point ayant $2n$ coordonnées dans l'espace des phases.

A tout ensemble de conditions initiales $[q(0), p(0)]$, les équations de Hamilton donnent une solution unique (à un départ, une seule arrivée) sous la forme de $2n$ équations paramétriques :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \begin{cases} q_i = q_i[q(0), p(0), t] \\ p_i = p_i[q(0), p(0), t] \end{cases}$$

Ces équations étant réversibles dans le temps, à toute solution correspond un ensemble unique de conditions initiales (à toute arrivée, un seul départ).

Le point représentatif du système décrit donc au cours du temps une courbe unique, appelée trajectoire de phase, donnée par les fonctions $q_{i=1\dots n}(t)$ et $p_{i=1\dots n}(t)$. Par exemple, pour le pendule plan simple, nous avons directement l'équation cartésienne à partir de la conservation de l'énergie donnée par la relation:

$$\mathcal{H} = \frac{p_\theta^2}{2m\rho^2} - mg\rho\cos\theta$$

$$p_\theta = \pm \sqrt{2m\rho^2(\mathcal{H} + mg\rho\cos\theta)}$$

L'unicité de solution des équations de Hamilton implique que deux trajectoires de l'espace des phases ne peuvent se croiser. Si c'était le cas, à deux ensembles de conditions initiales différentes correspondrait un même état au point où elles se croisent. Par conséquent, le nombre d'états dynamiques initial se conserve. De même, une trajectoire ne peut se couper car on aurait un mouvement perpétuel, le point de coupure servant de conditions initiales.

Les conditions initiales d'un système dynamique ne sont jamais connues avec une précision infinie. On considère donc un hypervolume $\mathcal{V}$ de l'espace des phases, suffisamment grand pour que la probabilité d'y trouver le système à l'instant initial soit proche de un. Ce hypervolume se déplace et se déforme au cours du temps. Prenons un élément d'hypervolume dV de cet hypervolume, et étudions comment varie la densité d'états ρ dans cet élément d'hypervolume. On considère la projection de dV dans le plan de la coordonnée q_k et de l'impulsion conjuguée p_k :

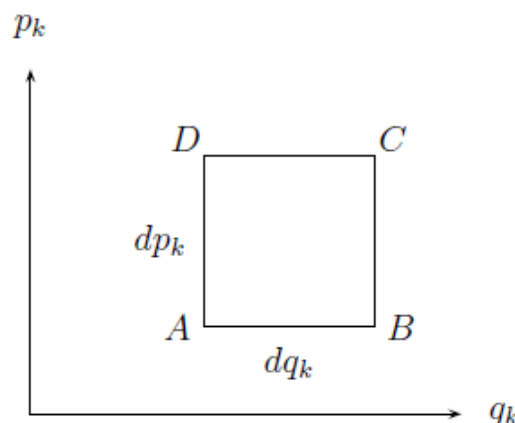


Figure 3. 3 : Projection de l'hypervolume élémentaire dans le plan q_k, p_k

Nombre d'états entrants par **AD** en un temps **dt** :

$$\rho \dot{q}_k dt dp_k$$

Pour des raisons de lisibilité, nous n'indiquerons plus les indices **k** dans ce qui suit, mais à la fin de la démonstration nous sommerons sur tout les **k**. Nombre d'états sortants par **BC** en un temps **dt** :

$$(\rho + \delta_q \rho)(\dot{q} + \delta_q \dot{q}) dt dp = (\rho \dot{q} + \delta_q \rho \dot{q} + \rho \delta_q \dot{q} + \delta_q \rho \delta_q \dot{q}) dt dp$$

où $\delta_q \rho$ est la variation de densité ρ selon la coordonnée q , c'est à dire,

$$\delta_q \rho = \frac{\partial \rho}{\partial q} dq$$

En négligeant les éléments différentiels d'ordre deux,

$$(\rho + \delta_q \rho)(\dot{q} + \delta_q \dot{q}) dt dp = \left(\rho \dot{q} + \frac{\partial \rho}{\partial q} dq \dot{q} + \rho \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} dq \right) dt dp$$

La différence entre ce qui entre et ce qui sort de l'élément de volume par les faces **AD** et **BC** en un temps **dt** vaut donc :

$$-\left(\frac{\partial \rho}{\partial q} \dot{q} + \rho \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} \right) dt dp dq$$

De même, la différence entre ce qui entre et ce qui sort de l'élément de volume par les faces **AB** et **DC** en un temps **dt** vaut :

$$-\left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \dot{p} + \rho \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} \right) dt dq dp$$

Puisqu'il n'y a ni création, ni annihilation d'états, la différence entre ce qui entre et ce qui sort crée une variation locale du nombre d'états en un temps **dt** dans le volume considéré :

$$\delta_t \rho dq dp = -\left(\frac{\partial \rho}{\partial q} \dot{q} + \rho \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} + \frac{\partial \rho}{\partial p} \dot{p} + \rho \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} \right) dt dq dp$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dt = -\left(\frac{\partial \rho}{\partial q} \dot{q} + \rho \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} + \frac{\partial \rho}{\partial p} \dot{p} + \rho \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} \right) dt$$

Ce qui donne, en remettant les indices,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dt + \frac{\partial \rho}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial \rho}{\partial p_k} dp_k = -\rho \left(\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_k} + \frac{\partial \dot{p}_k}{\partial p_k} \right) dt$$

Et en considérant l'élément d'hypervolume :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \rho}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \rho}{\partial p_i} dp_i \right) = -\rho \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right) dt$$

$$d\rho = -\rho \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right) dt$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right)$$

Quel que soit le Hamiltonien, les équations de Hamilton s'écrivent :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \begin{cases} \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \end{cases}$$

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \begin{cases} \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} = -\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_i \partial q_i} \\ \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q_i \partial p_i} \end{cases}$$

Les dérivées partielles étant continués, nous avons,

$$\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_i \partial q_i} = \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q_i \partial p_i}$$

$$\frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} = \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i}$$

Nous en déduisons le théorème de Liouville : pour tout système dynamique qui suit les équations canoniques, quel que soit le Hamiltonien, la densité d'états se conserve au cours du mouvement :

$$\frac{\partial \rho}{\partial q} = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho = \text{cste}$$