Chapitre I
FONDEMENTS DE LA MECANIQUE ANALYTIQUE

II- Description d'un système matériel

1- Paramétrage d'un système : Coordonnées généralisées

On appelle paramètres de configuration ou coordonnées généralisées d'un système, un ensemble de **n** paramètres $(q_i)_{i=1,\ldots,n}$ nécessaire pour avoir la position de **tous** les points et **tous** les solides du système à un instant t donné.

Soit un système (Σ) en mouvement dans un repère R.

La position de (Σ) dans R est entièrement définie par quantités (q_1, q_2, …, q_n) si et seulement si : $\forall\, t\,, M \in (\Sigma), \overrightarrow{OM}\,(q_1, q_2, \ldots, q_n)$

Les paramètres $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ sont appelés coordonnés généralisés de Σ dans son mouvement dans R ou paramètres primitifs du système matériel.

Ces paramètres sont appelés coordonnées généralisées car elles peuvent être des coordonnées spatiales ou angulaires.

i- Cas d'un point matériel :

La position d'un point matériel est parfaitement déterminée dans les différentes systèmes des coordonnées (cartésiennes, cylindriques, sphériques,… etc.)

Exemple: dans les coordonnées cartésiennes on écrit :

$$\overrightarrow{OM}(x,\ y,\ z) \quad \Longrightarrow \quad q\ =\ (x,\ y,\ z)$$

ii- Cas d'un solide :

La position d'un solide est entièrement déterminée par des paramètres qui sont les coordonnées de son centre d'inertie et/ou les angles d'Euler.

- **Cas d'un solide non rectiligne**

$$\overrightarrow{OM}\left(x_G,\ y_G,\ z_G\,,\ \underbrace{\psi,\ \theta,\ \varphi}_{angles\ d'Euler}\right) \quad \Longrightarrow \quad q\ =\ (\,x_G,\ y_G,\ z_G\,,\ \underbrace{\psi,\ \theta,\ \varphi}_{angles\ d'Euler}\,)$$

- **Cas d'un solide rectiligne**

$$\overrightarrow{OM}\left(x_G,\ y_G,\ z_G\,,\ \underbrace{\psi,\ \theta}_{angles\ d'Euler}\right) \quad \Longrightarrow \quad q\ =\ (\,x_G,\ y_G,\ z_G\,,\ \underbrace{\psi,\ \theta}_{angles\ d'Euler}\,)$$

iii- Cas d'un système Σ:

La position d'un système matériel composé de « P » points et « S » solides est alors déterminée par N = 3P + 6 S paramètres.

Exemple : Choix de coordonnés généralisées

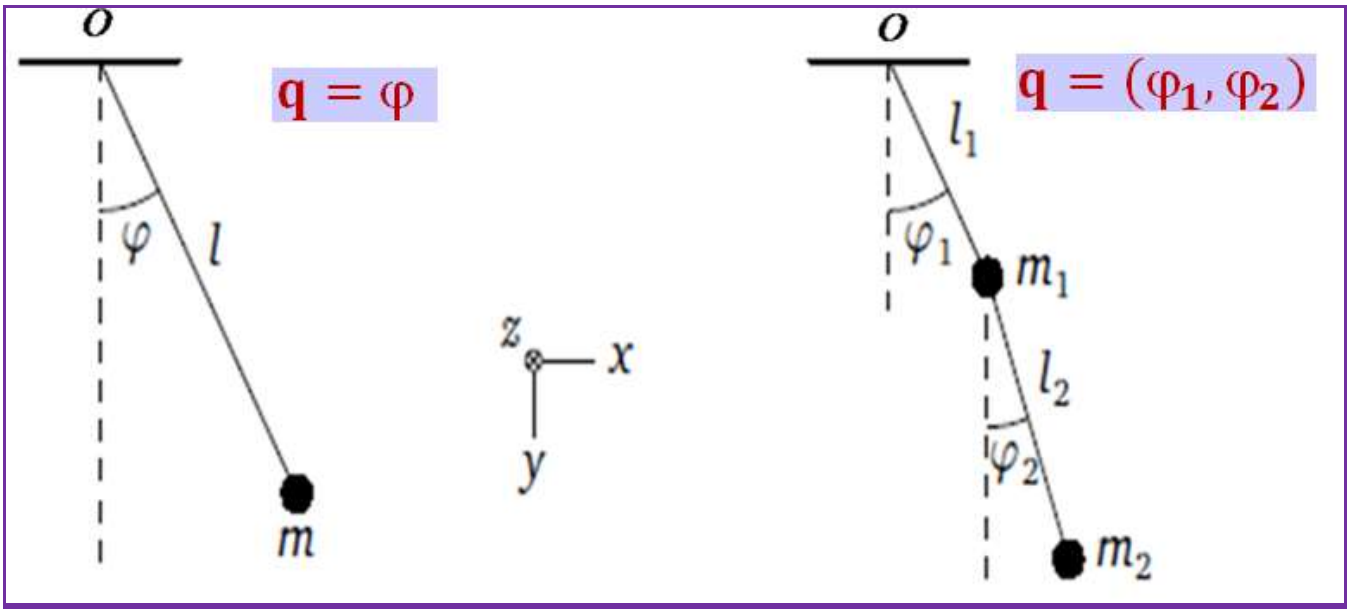


Figure 1. 1 :- Le pendule simple (à gauche) et le pendule double (à droite)

2- Espace de configuration

On considère un système matériel dont la position est déterminée par n variables indépendantes (ou degrés de liberté) q_1, q_2, ……., q_i, ……, q_n, notés $\{q_i\}_{i=1 \text{ à } n}$. On appelle **espace de configuration (espace généralisé)** l'espace à n dimensions tel que la position du système soit caractérisée par un point de coordonnées $\{q_i\}_{i=1 \text{ à } n}$. Au cours du temps, ce point $\bar{q} = \{q_i\}$ décrit une trajectoire dans cet espace, **ie** $\forall M \in (S)\ \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(\bar{q}, t)$.

Exemple :

Pour un point matériel évoluant dans l'espace physique habituel, l'espace de configuration s'identifie à cet espace (Fig. 1. 2 a). En revanche, il n'en est pas de même pour un pendule simple, dont la position est caractérisée par l'angle θ qu'il fait avec la verticale descendante (Fig. 1. 2 b) ou pour un ensemble de 2 particules couplées par un ressort de raideur k évoluant sur un même axe Ox (Fig. 1. 2c).

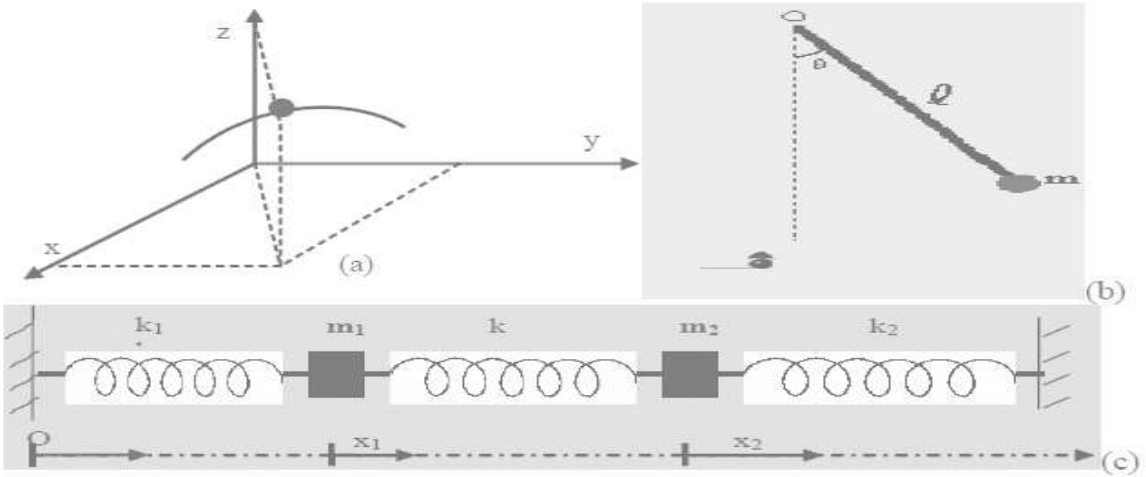


Figure. 1. 2

Pour un système constitué de N particules, en mouvement quelconque les unes par rapport aux autres, le nombre de degrés de liberté est n = 3N. L'espace de configuration a donc dans ce cas 3N dimensions.

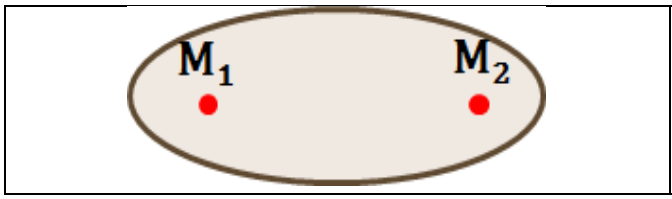
Notons qu'un *point de l'espace de configuration détermine la position du système et non son état mécanique*, lequel exige, en outre, la connaissance de l'ensemble des vitesses ou mieux des quantités de mouvement.

Indépendances des coordonnées généralisées

- Si tous les q_i sont indépendantes alors **dim(S) = n.**
- Si il y a **"m"** relations entre les q_i alors **dim(S) = n - m.**

Exemple :

❖ Prenons le cas où 2 points M_1 et M_2 sont indépendantes (Fig. 1. 3a) donc obligatoirement on a un système à 6 dimensions.

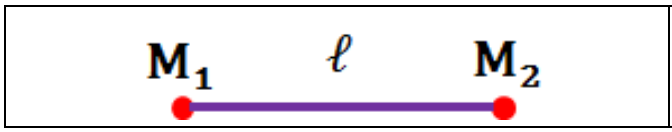


$$dim = 2 \times 3 = 6$$

Fig. 1. 3a-

❖ Si M_1 et M_2 sont liés par la relation $M_1M_2 = l$ (Fig. 1. 3b) donc on aura un système à 5 dimensions car la 6ème sera relié par une équation $M_1M_2 = l$

D'où dim = d.d.l = 6 - 1 = 5.



$$dim = 6 - 1 = 6$$

Fig. 1. 3b-

3-Vitesse généralisée

Pour un point de l'espace physique (de dimensions 3), la vitesse est définie à partir du vecteur positon $\overrightarrow{OM}(t)$:

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

Nous généralisons cette écriture comme suit:

$$\vec{V}(M) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

Avec : $q(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ sont des coordonnées généralisées.

$\dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n)$: la vitesse généralisée de dimension N, tel que : $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$

4-Liaisons mécaniques (contraintes)

Un système est soumis à des liaisons s'il existe des contraintes qui en limitent les mouvements externes ou internes. Les liaisons s'expriment soit par des forces de contrainte, soit par des équations de liaison.

4- 1- Définitions

- On appelle liaison toute restriction de liberté à un système (particule, solide, ...) vis-à-vis d'un autre système en terme de : Position et / ou de vitesse.

$\Longrightarrow$ **Existence d'une force de liaison et de relation entre q_i et $\dot{q}_i$.**

- Une liaison est une relation de contact entre deux systèmes.
- Un solide est soumis à une liaison si les positions qu'il doit prendre doivent satisfaire à certaine condition.
- Une liaison pour un système (S) : toute relation (ou système de relation) imposée, à priori, et indépendamment de toute conséquence des lois de la dynamique, aux paramètres inconnues $q = \{q_i\}$.
- Donc une liaison est une limitation de l'indépendance du mouvement d'une partie ou plusieurs de système imposé par une autre partie ou bien d'autre obstacles extérieurs.

4- 2- Les différentes types de contact

On distingue de manière purement théorique trois grands types de contact :

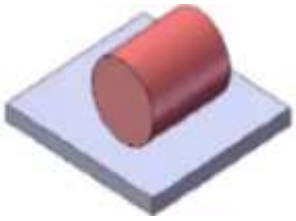
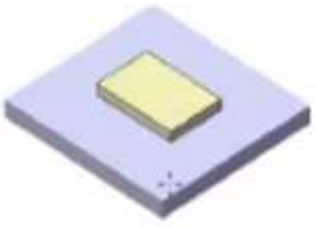
Contact ponctuel		
Contact linéaire Ou linéique		
Contact surfacique		

Fig. 1. 4 : Les trois grands types de contact

4- 3- Classification des liaisons et formes des équations de liaisons

Toute liaison (contact, glissement nul, frottement nul, ……, etc) est caractérisée par une relation entre les différentes coordonnées généralisées ou certaines d'entre

elles et le temps. On exprime une liaison par des relations : $\mathbf{F}(\mathbf{q_i}, \dot{\mathbf{q}}_i, \mathbf{t})$ où $\dot{\mathbf{q}}_i = \frac{\mathbf{dq_i}}{\mathbf{dt}}$: vitesse généralisée. Toute relation de ce genre traduit une liaison ou contrainte. Soit $\mathbf{m}$ le nombre de telle relation ($\mathbf{m} \leq \mathbf{n}$), le nombre de coordonnées généralisées indépendantes : $\mathbf{n-m = s =}$ d.d.l.

On distingue deux classes de liaisons :

4- 3- 1- liaison holonome

Une liaison est dite holonome si elle se traduit par une relation entre les paramètres de configuration $\mathbf{q_i}$ est éventuellement le temps t, elle est de la forme : $\mathbf{F}(\mathbf{q_i}, \mathbf{t}) = \mathbf{0}$.

$\Rightarrow \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} = \mathbf{0} \quad \forall \quad \mathbf{i}$. C'est le cas des **conditions géométriques** (ne font pas intervenir les vitesses généralisées $\frac{\mathbf{dq_k}}{\mathbf{dt}}$) **(Liaison géométrique).**

Définition 1 : Une liaison exprimée par une égalité sera dite une liaison bilatérale.

La liaison bilatérale : traduit par une équation $\mathbf{F}(\mathbf{q_1}, \ldots, \mathbf{q_n}, \mathbf{t}) = \mathbf{0}$ ie agit sans interruption (à l'exclusion de toute intervention de leurs dérivés).

Définition 2 : Une liaison exprimée par une inégalité sera dite une liaison unilatérale.

La liaison unilatérale : traduit par une inéquation $\mathbf{F}(\mathbf{q_1}, \ldots, \mathbf{q_n}, \mathbf{t}) \leq \mathbf{0}$ ie peut agir ou ne peut pas agir.

Exemples :

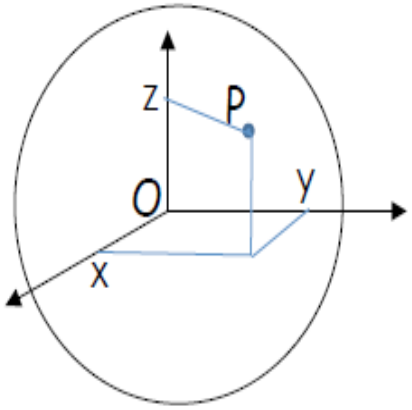
Deux points M_1 et M_2 sont liés par la relation $\mathbf{M_1M_2 = l}$.

Donc on est en présence d'une liaison bilatérale traduit par la relation $\mathbf{M_1M_2 = l}$.

NDL = 6 – 1 = 5

Soit une bille à l'intérieure d'une sphère de rayon R.

$\boldsymbol{F(q,t) = x^2 + y^2 + z \leq R^2}$ **: Liaison holonome unilatérale**



NB : La rigidité d'un système de particule (particules fixés par rapport à d'autres) s'exprime par des liaisons holonomes.

4- 3- 2- liaison non holonome

Une liaison non - holonome sera, donc, traduit par $\mathbf{F}(\mathbf{q_i}, \dot{\mathbf{q}}_i, \mathbf{t}) \Rightarrow$ **tq** $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \neq \mathbf{0} \quad \forall \quad \mathbf{i}$.

C'est le cas des **conditions cinématiques** (font intervenir les vitesses généralisées $\frac{\mathbf{dq_i}}{\mathbf{dt}}$) **(Liaison cinématique).**

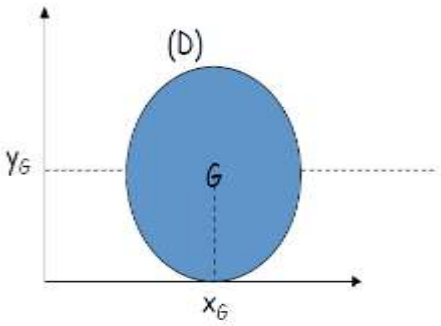
Autrement dit, ce sont des liaisons dépendantes des q, $\dot{q}$ et t, de la forme :

$F(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t) = 0$: Liaison bilatérale

$F(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t) \leq 0$: Liaison unilatérale

Exemples:

- **Disque roulant sans glisseur sur un axe**



Paramètres de configuration : $q = (x_G, y_G, z_G)$

Equations de liaison :

$y_G - R = 0$: Condition géométrique de contact (liaison holonome)

$\dot{x_G} + R\,\dot{\varphi} = 0$: CRSG : Condition cinématique (liaison non holonome)

- **Roulement sans glissement d'une sphère sur un plan :**

$$\vec{v_g}(S/R) = \vec{v}(I \in S/R) = \vec{0} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{x_G} - R(\dot{\theta}\sin\psi - \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi) = 0 \\ \dot{y_G} - R(\dot{\theta}\cos\psi - \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi) = 0 \end{cases}$$: Liaisons (bilatérales) non holonomes.

Quelques remarques et définitions

i- Toute liaison holonome peut être rendue non holonome par dérivation par rapport à t ;

ii- Certaines liaisons non holonomes peuvent être rendues holonomes par intégration (liaisons semi-holonomes) ;

iii- Une liaison peut être indépendante explicitement du temps (scléronome). Une liaison scléronome sera, donc, traduit par $\mathbf{F}(\mathbf{q_k}, \dot{\mathbf{q}}_\mathbf{k}, \mathbf{t})$ et $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{t}} = \mathbf{0}\ \forall\ \mathbf{k}$, c'est le cas des obstacles fixes (La plus part des liaisons usuelles :pivot, rotule, …) ;

iv- Une liaison rhéonome (cas contraire des liaisons scléron omes) sera, donc, traduit par $\mathbf{F}(\mathbf{q_k}, \dot{\mathbf{q}}_\mathbf{k}, \mathbf{t})$ et $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{t}} \neq \mathbf{0}\ \forall\ \mathbf{k}$. C'est le cas des obstacles mobiles ;

v- Une liaison est dite parfaite si elle est holonome, paramétrable (ou résoluble) bilatéral tel que le travail de la force de liaison est nul (sans jeu et sans frottement). Elle est dite dissipative dans le cas où il y a perte d'énergie (le travail des forces de liaisons est non nul).

vi- On appellera liaisons principales (L.P.), des liaisons arbitrairement choisies parmi toutes les liaisons imposées à (S) qui vérifient les 2 points suivants :

a- $F(q_k, t)$ et $\frac{\partial F}{\partial q_k} = 0\ \forall\ k$ ie elles sont holonomes.

b- le système est résoluble ou plus généralement paramétrable **ie** que l'on peut effectivement les résoudre (ou les paramétrer).

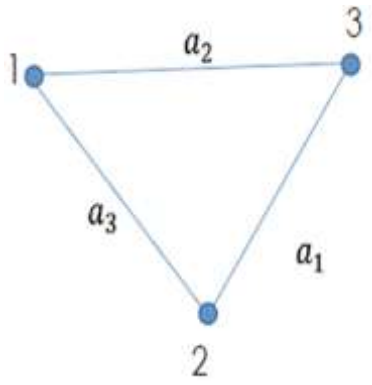
vii- S'il existe des liaisons autres que les liaisons principales, on les appellera liaisons supplémentaires (L.S).

4- 4- Le nombre de degré de liberté (NDL)

On considère un système S paramétré par N coordonnées généralisés (N = 6 s + 5 r + 3 l) (le système contient des solides en mouvement quelconques (6s), des solides en translation (5r) et des points matériels (3l). Le système admet h liaisons holonomes et p liaisons non holonomes. Le nombre de degrés de liberté n compte tenu de toutes les liaisons est défini par :

$$\mathbf{NDL = N - h - p}$$

Exemple 2 : Système de 3 corps liés



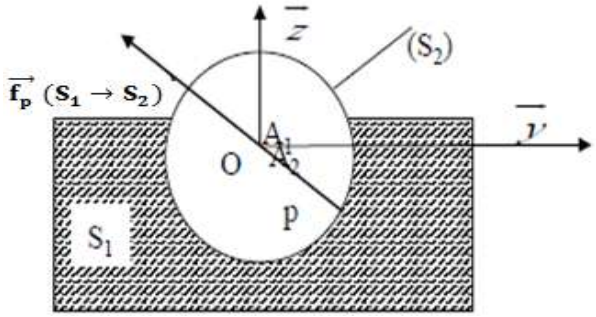
$$\begin{cases} f_1 = |\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}| - a_3 = 0 \\ f_2 = |\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_3}| - a_1 = 0 \\ f_3 = |\overrightarrow{r_3} - \overrightarrow{r_1}| - a_2 = 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ Nombre de liaisons l = 3

Nombre de degrés de liberté NDL = 3N – l = 9 – 3 = 6

4- 5- Exemples des liaisons et calcul du nombre de degré de liberté (NDL)

Liaison rotule ou sphérique (sphère/sphère)



Le point A_2 de (S_2) reste confondu avec un point A_1 de (S_1)

Liaisons :

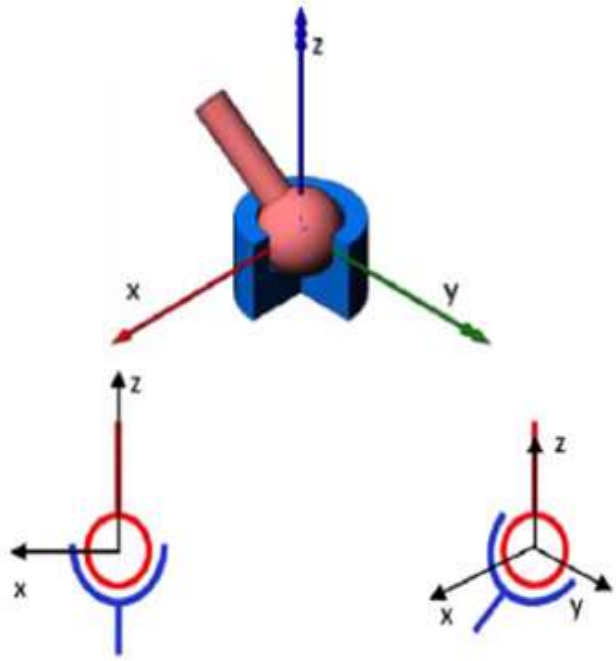
$$\begin{cases} \mathbf{T_x = 0} \\ \mathbf{T_y = 0} \\ \mathbf{T_z = 0} \end{cases} \Longrightarrow \mathcal{F} = \begin{Bmatrix} \mathcal{R}_x & 0 \\ \mathcal{R}_y & 0 \\ \mathcal{R}_z & 0 \end{Bmatrix}_{A,\mathcal{R}}$$

Bilan : 0 translation et 3 rotations autour de $(O,\vec{X})$, $(O,\vec{Y})$ et $(O,\vec{Z})$.

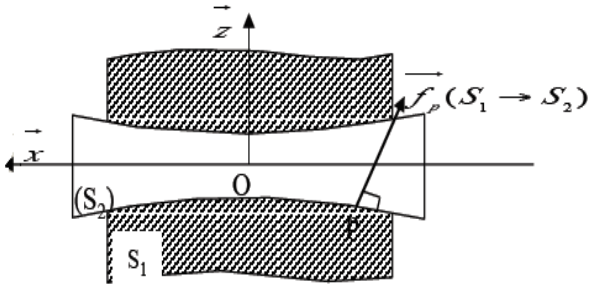
$\Longrightarrow$ 3 DDL

Cette liaison a trois degrés de liaison : les trois translations.

Seules sont permises les trois mouvements de rotation.



Liaison pivot : Cylindre/Cylindre



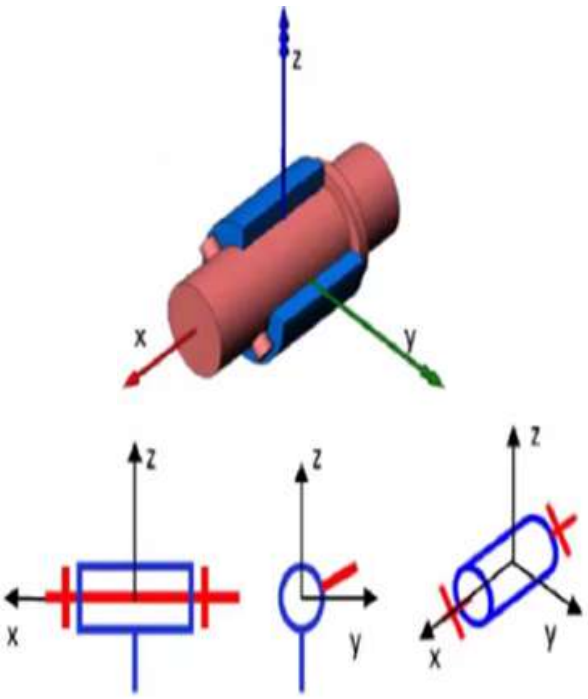
Deux points A_2 et B_2 de (S_2) Distants d'une longueur L restent Confondus avec deux points A_1 et B_1 de (S_1) distants de la même longueur L ($\neq 0$). Le mouvement de $(S_2)/(S_1)$ est une rotation d'axe $(O,\vec{X})$.

Liaisons :

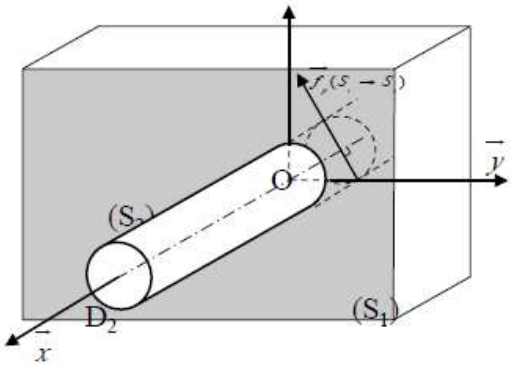
$$\begin{cases} T_y = 0 \\ T_y = 0 \\ T_z = 0 \\ \\ R_y = 0 \\ R_z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \mathcal{F} = \begin{Bmatrix} \mathcal{R}_x & 0 \\ \mathcal{R}_y & \mathcal{M}_y \\ \mathcal{R}_z & \mathcal{M}_z \end{Bmatrix}_{A,\mathcal{R}}$$

Cette liaison a cinq degrés de liaison : trois degrés de translation et deux degrés de rotation.

Bilan : Seule une rotation (ici autour de (OX) est permise $\Longrightarrow$ 1 DDL



Liaison pivot glissant



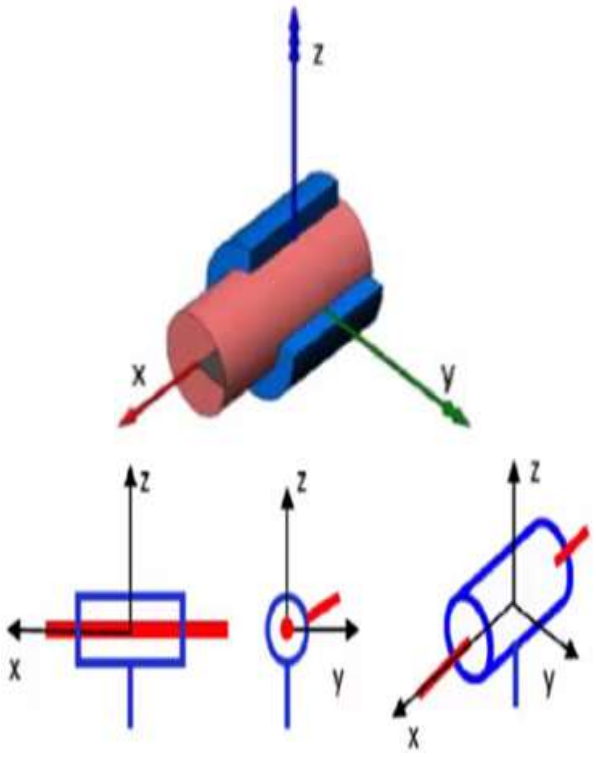
Le mouvement de $(S_2)/(S_1)$ se décompose en :

- rotation autour de $(O,\vec{X})$.
- translation suivant $(O,\vec{X})$.

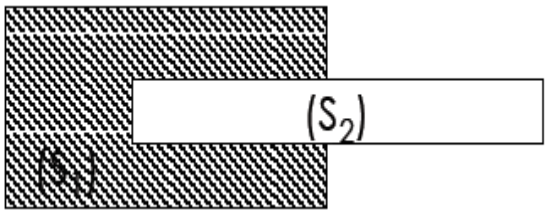
Liaisons :

$$\begin{cases} T_y = 0 \\ T_z = 0 \\ \\ R_y = 0 \\ R_z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \mathcal{F} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{R}_y & \mathcal{M}_y \\ \mathcal{R}_z & \mathcal{M}_z \end{Bmatrix}_{A,\mathcal{R}}$$

Bilan : 1 translation et 1 rotation $\Longrightarrow$ 2 DDL



Liaison encastrement

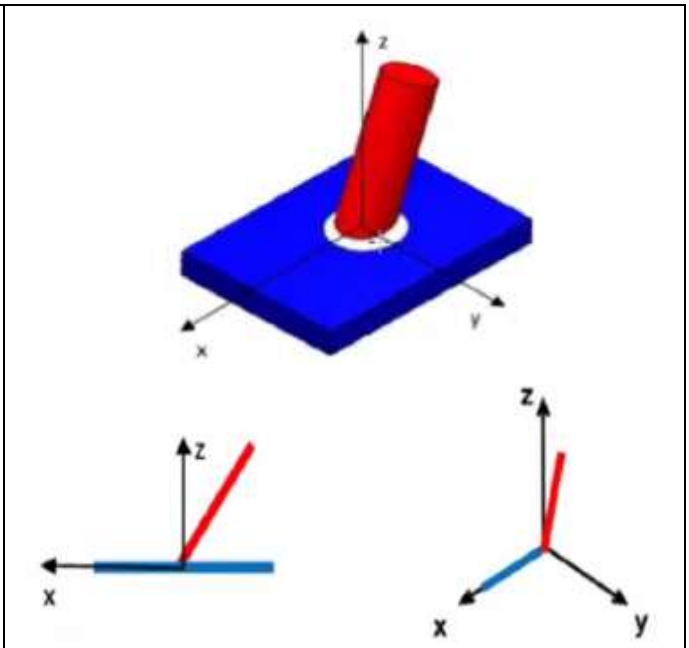


Le mouvement de $(S_2)/(S_1)$ est bloqué dans toutes les directions.

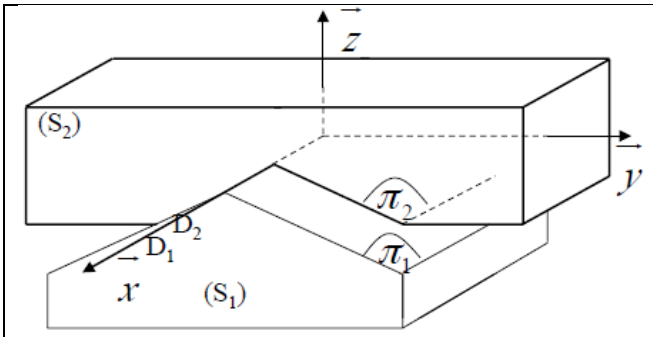
Liaisons :

$$\begin{cases} T_x = 0 \\ T_y = 0 \\ T_z = 0 \\ R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ R_z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \mathcal{F} = \begin{Bmatrix} \mathcal{R}_x & \mathcal{M}_x \\ \mathcal{R}_y & \mathcal{M}_y \\ \mathcal{R}_z & \mathcal{M}_z \end{Bmatrix}_{A,\mathcal{R}}$$

Bilan : 0 translation et 0 rotation $\Longrightarrow$ 0 DDL



Liaison glissière



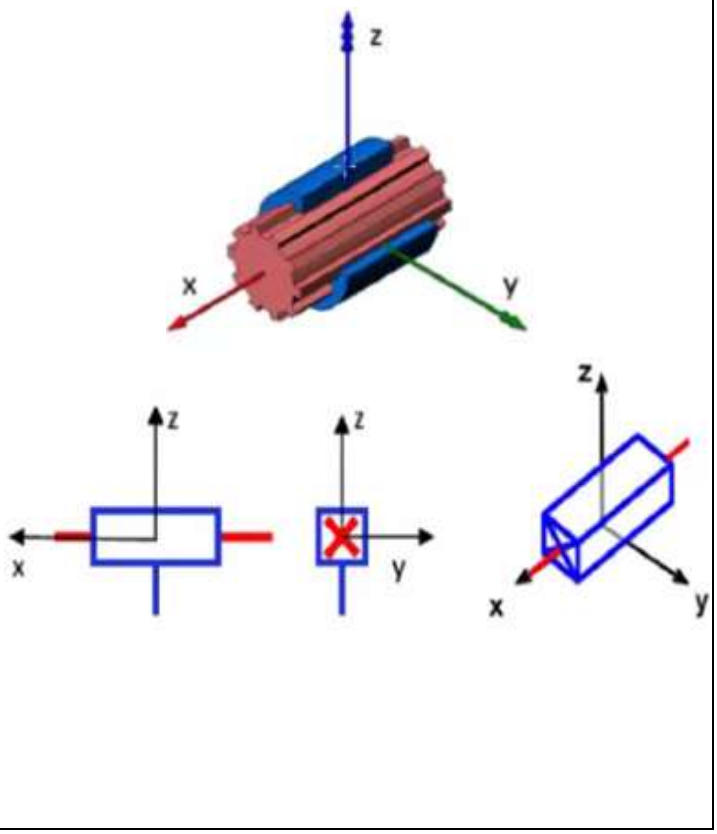
Un plan π_1 de (S_1) reste confondu avec un plan π_2 de (S_2) et une droite D_2 liée à (S_2) et située dans π_2 reste confondue avec une droite D_1 liée à (S_1) et située dans π_1.

Le mouvement de $(S_2)/(S_1)$ est Une translation d'axe $(O, \vec{X})$.

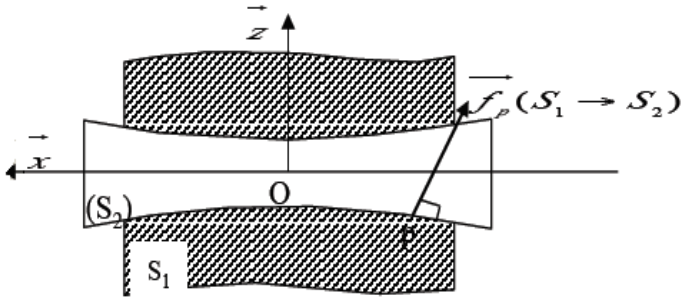
Liaisons :

$$\begin{cases} T_y = 0 \\ T_z = 0 \\ R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ R_z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \mathcal{F} = \begin{Bmatrix} 0 & \mathcal{M}_x \\ \mathcal{R}_y & \mathcal{M}_y \\ \mathcal{R}_z & \mathcal{M}_z \end{Bmatrix}_{A,\mathcal{R}}$$

Bilan : Seule une translation (ici autour de (OX) est permise $\Longrightarrow$ 1 DDL



Liaison helicoïdale

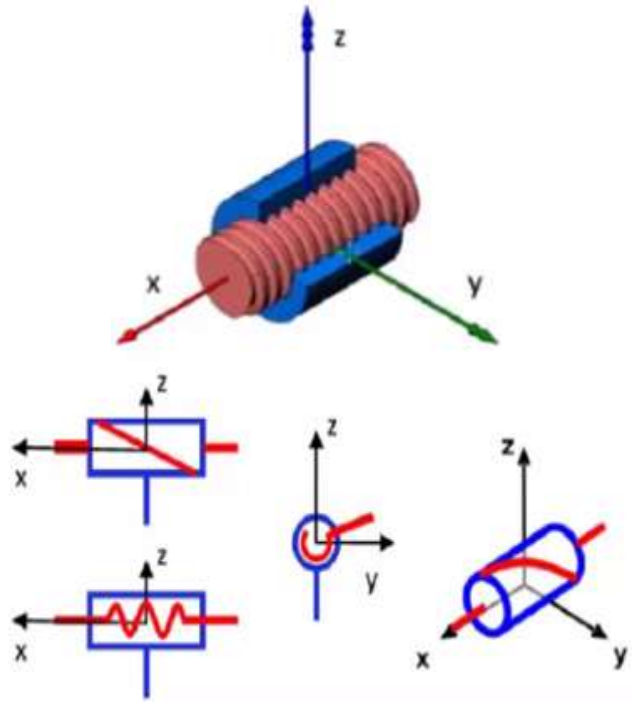


Deux points A_2 et B_2 de (S_2) Distants d'une longueur L restent confondus avec deux points A_1 et B_1 de (S_1) distants de la même longueur L $(\neq 0)$. Le mouvement de $(S_2)/(S_1)$ est une rotation d'axe $(O,\vec{X})$.

Liaisons :

$$\begin{cases} T_y = 0 \\ T_z = 0 \\ R_y = 0 \\ R_z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \mathcal{F} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{R}_y & \mathcal{M}_y \\ \mathcal{R}_z & \mathcal{M}_z \end{Bmatrix}_{A,\mathcal{R}}$$

Bilan : 1 translation et 1 rotation qui sont liées $(T_X = kR_X) \Longrightarrow$ 1 DDL



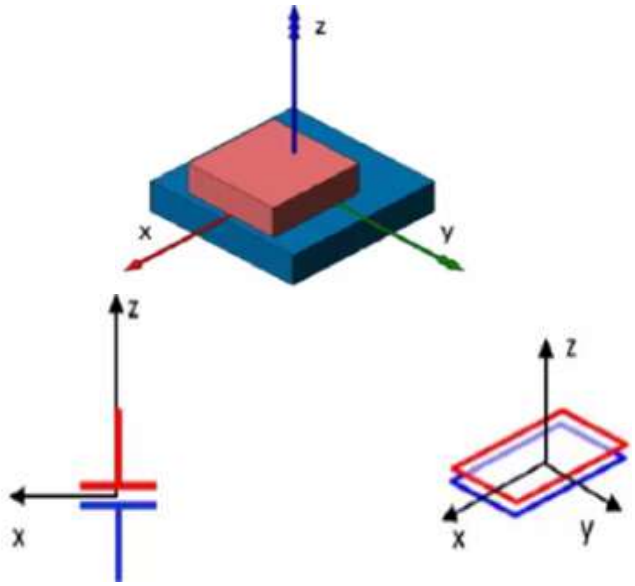
Liaison apui plan

- Possibilité de mouvement en translation suivant $(O,\vec{X})$;
- Possibilité de mouvement en translation suivant $(O,\vec{Y})$;
- Possibilité de mouvement en rotation autour de $(O,\vec{Z})$

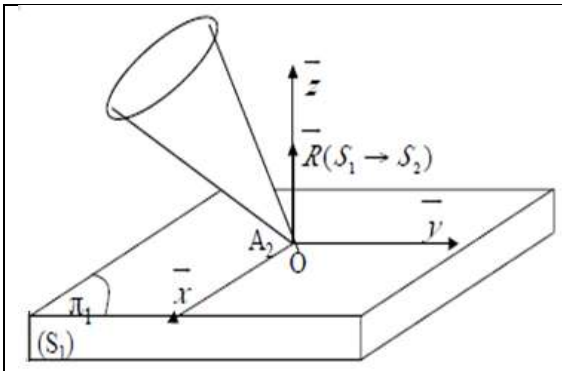
Liaisons :

$$\begin{cases} T_z = 0 \\ R_x = 0 \\ R_y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \mathcal{F} = \begin{Bmatrix} 0 & \mathcal{M}_x \\ 0 & \mathcal{M}_y \\ \mathcal{R}_z & 0 \end{Bmatrix}_{A,\mathcal{R}}$$

Bilan : 2 translation et 1 rotation $\Longrightarrow$ 3 DDL



Liaison ponctuelle : Sphère ou cone sur un plan



Le point A_2 de (S_2) reste dans le plan π_1 de (S_1)

Le mouvement de $(S_2)/(S_1)$ se décompose :

- Rotation autour de $(O,\vec{X})$, $(O,\vec{Y})$ et $(O,\vec{Z})$
- Translation suivant $(O,\vec{X})$, $(O,\vec{Y})$

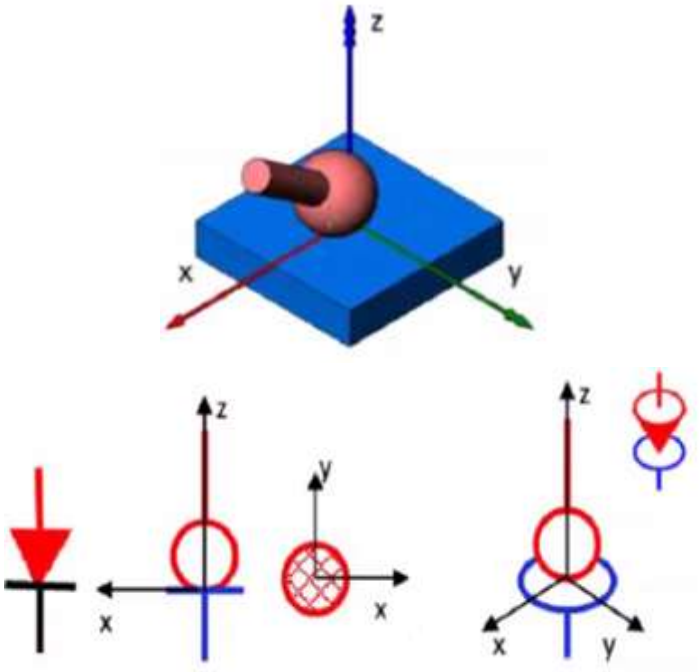
Liaisons :

$$\{\mathbf{Tz} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathcal{R}_z & \mathbf{0} \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}^{A}$$

Cette liaison à un degré de liaison de translation selon l'axe perpendiculaire à la surface de contact, Oz pour l'exemple.

Bilan : 2 translation et 3 rotations autour de $(O,\vec{X})$, $(O,\vec{Y})$ et $(O,\vec{Z})$.

$\Longrightarrow$ 5 DDL



Liaison linéaire rectiligne : Cylindre/Plan

Liaisons :

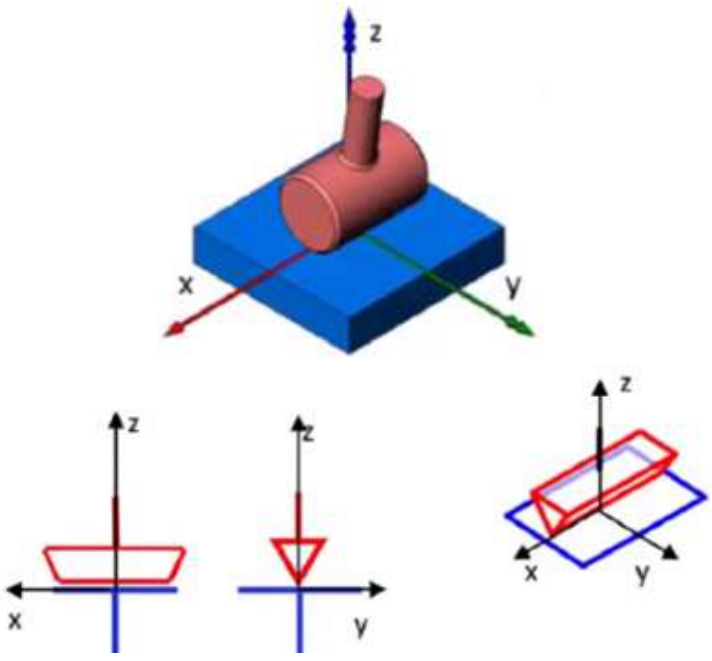
Tx = 0

Ry = 0

$$\mathcal{F} = \begin{Bmatrix} \mathcal{R}_x & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{M}_y \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}^{A}$$

Bilan : 2 translation et 2 rotations autour de $(O,\vec{X})$ et $(O,\vec{Z})$.

$\Longrightarrow$ 4 DDL



Liaison linéaire annulaire

Liaisons :

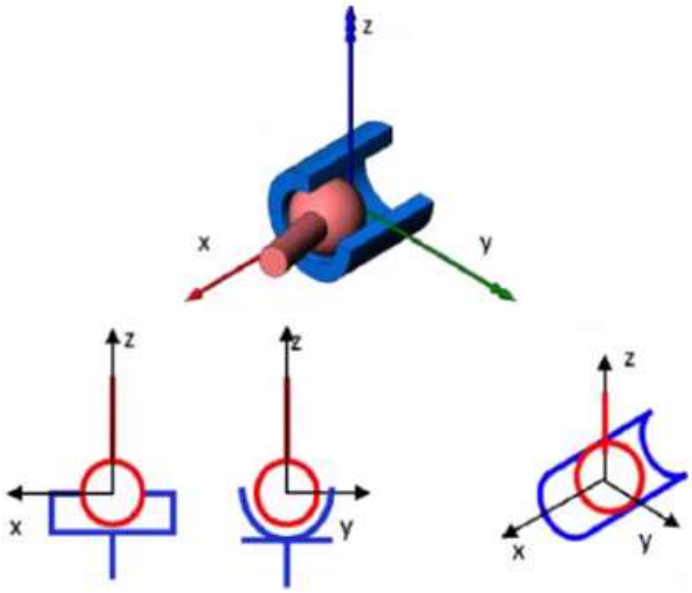
$\mathbf{Ty = 0}$

$\mathbf{Tz = 0}$

$$\mathcal{F} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{R}_y & 0 \\ \mathcal{R}_z & 0 \end{Bmatrix}_{A,\mathcal{R}}$$

Bilan : 1 translation et 3 rotations autour de $(O,\vec{X})$, $(O,\vec{Y})$ et $(O,\vec{Z})$.

$\Longrightarrow$ 4 DDL



4- 6- Notions de forces ou d'efforts

On distingue 2 types de forces :

- Les forces extérieurs à (S) qui sont des forces exercées sur des éléments de (S) par des systèmes n'appartenant pas à (S). En général, il s'agit des forces actives ou données.
- Les forces intérieures qui sont des forces exercées par des éléments de (S) sur d'autres éléments de (S) (force de liaison).

Exemple

- Force à distance (gravité)
- force données.
- Force de contact (frottement)
- force de liaison.
- Force conservative (gravité) dérive d'une énergie potentielle Ep = U.
- Force non conservative (frottement) ne dérive pas d'une Ep = U.

$\vec{F}$ est conservative si . $\vec{F}(\vec{r}) = -\overrightarrow{grad}\, U(\vec{r})$

$U(\vec{r})$: énergie potentiel associe à la force $\vec{F}(\vec{r})$:

$$dW = \vec{F}.d\vec{r} = -\overrightarrow{grad}\, U(\vec{r}).d\vec{r} = -dU$$

III- Le principe des travaux virtuels

Cette méthode des *travaux virtuels*, qui est à l'origine de la formulation lagrangienne de la mécanique (cf. chapitre 2), s'appuie sur la notion de *déplacement virtuel (noté D.V.)*. Elle présente l'avantage de ne pas exiger le calcul de toutes les réactions entre les différentes parties des systèmes considérés et donc d'être plus efficace.

1- Mouvement virtuel (M.V) d'un système matériel

1- 1- Différentielles et dérivées virtuelles

1- 1- 1- Différentielles

Soit une fonction de n + 1 variables $q_1, q_2, \ldots q_n, t$: $f(q_i, t)$ sa différentielle réelle est:

$$\mathbf{df} = \sum_{1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q_i}} \mathbf{dq_i}\right) + \frac{\partial f}{\partial t} dt \qquad (1.1)$$

Où dq_i et dt sont les différentielles des q_i et t.

Définition : On appellera différentielle virtuelle de f à l' instant t l'expression :

$$\mathbf{df}^* = \sum_{1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q_i}} \mathbf{dq_i}^* \qquad (1.2)$$

Par rapport à l'expression précédente, le temps est « figé », dt = 0.

Exemple:

$$f(x, \varphi, t) = x \sin(\omega t + \varphi)$$
$$\Longrightarrow df = \sin(\omega t + \varphi)dx + x\cos(\omega t + \varphi)(d\varphi + \omega dt)$$
$$\Longrightarrow df^* = \sin(\omega t + \varphi)dx^* + x\cos(\omega t + \varphi)\, d\varphi^*$$

1- 1-2- dérivées virtuelles

Soit une fonction de n + 1 variables $q_1, q_2, \ldots q_n, t$: $f(q_i, t)$ sa dérivée réelle est:

$$\mathbf{f}' = \sum_{1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q_i}} \mathbf{q_i}'\right) + \frac{\partial f}{\partial t} \qquad (1.3)$$

Définition: On appellera dérivée virtuelle de f à l'instant t figé l'expression :

$$\mathbf{f}'^* = \sum_{1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q_i}} \mathbf{q_i}'^* \qquad (1.4)$$

Exemple:

$$f(x, \varphi, t) = x \sin(\omega t + \varphi)$$
$$\Longrightarrow f' = x' \sin(\omega t + \varphi) + (\varphi' + \omega) x\cos(\omega t + \varphi)$$
$$\Longrightarrow f'^* = x'^* \sin(\omega t + \varphi) + \varphi'^* x\cos(\omega t + \varphi)$$

1- 2- Déplacement réel et déplacement virtuel

1- 2- 1- Déplacement réel

La position d'un point M est définie par son vecteur position $\overrightarrow{OM}$ (q, t).

Si on assimile le déplacement élémentaire (infinitésimal) du point M à sa différentielle réelle :

Le déplacement réel (D.R) infinitésimal d'un point quelconque M de (S) pendant l'intervalle **dt** est $\mathbf{\overrightarrow{MM'} = d\left(\overrightarrow{OM}\right) = d\overrightarrow{M} = d\vec{r}}$.

$$\mathbf{d\overrightarrow{OM}(q,t) = \sum_{1}^{n}\left(\frac{\partial \overrightarrow{OM}(q,t)}{\partial q_i} dq_i\right) + \frac{\partial \overrightarrow{OM}(q,t)}{\partial t} dt} \qquad (1.\ 5)$$

1- 2- 2- Déplacement virtuel

On peut associer un déplacement virtuel du point M à sa différentielle virtuelle

Définition 1: À un instant *t arbitraire mais fixe*, on appellera *mouvement virtuel (noté M.V.)* du système (S) la donnée d'un certain champ de vecteur $\vec{u}(M)$: $\forall\ \mathbf{M} \in \mathbf{S} \rightarrow \vec{\mathbf{u}}(\mathbf{M}) = \boldsymbol{\delta}\left(\overrightarrow{\mathbf{OM}}\right) = \boldsymbol{\delta}\overrightarrow{\mathbf{M}}$. Ce champ de vecteur sera interprété comme étant un *déplacement virtuel infinitésimal* à l'instant t et on le notera généralement $\delta\vec{M}$.

Notation: Le D.R et le D.V seront, donc, notés respectivement. $d\vec{M}$ et $\delta\vec{M}$.

Définition 2: On appelle *mouvement virtuel compatible (noté M.V.C.)* tout mouvement virtuel de (S) compatibles avec les liaisons principales à l'instant t fixé. Le champ de déplacement virtuel compatible (noté D.V.C) s'écrit :

$$\mathbf{d\overrightarrow{OM}^* = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i} dq_i^*\right) = \delta\overrightarrow{M}} \qquad (1.\ 6)$$

1- 3- Vitesse réelle et vitesse virtuelle

On considéré un système constitué de N points matériels et ayant n degrés de liberté et soient $q_i(t)$; $i = 1, \cdots n$, les équations horaires du mouvement du système.

1- 3-1 - Vitesse réelle

La vitesse réelle d'un système mécanique s'écrit :

$$\vec{V}(M) = \frac{d\overrightarrow{r^\alpha}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \overrightarrow{r^\alpha}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \overrightarrow{r^\alpha}}{\partial t} \qquad (1.7)$$

1- 3- 2- Vitesse virtuelle

La vitesse virtuelle d'un système mécanique s'écrit:

$$\mathbf{\vec{V}^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \overrightarrow{r^\alpha}}{\partial q_i} \dot{q}_\iota^*} \qquad (1.\ 8)$$

On appelle par champ de vitesses virtuelles d'un système matériel, le relevé des vitesses de ce système à cet instant.

2- Vitesses virtuelles compatibles avec les liaisons

Les liaisons holonomes peuvent s'écrire sous la forme suivante:

$$\mathbf{\frac{\partial F_\alpha}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \cdots + \frac{\partial F_\alpha}{\partial q_i}\dot{q}_\iota + \cdots + \frac{\partial F_\alpha}{\partial q_n}\dot{q}_n + \frac{\partial F_\alpha}{\partial t} = 0} \qquad \boldsymbol{\alpha = 1, \ldots\ldots, h} \qquad (1.\ 9)$$

Les liaisons non holonomes peuvent s'écrire sous la forme suivante:

$$a_{\alpha 1}\dot{q}_1 + \cdots + a_{\alpha i}\dot{q}_i + \cdots + a_{\alpha n}\dot{q}_n + b_\alpha = 0 \qquad \alpha = 1, \ldots, l \qquad (1.10)$$

On appellera vitesses virtuelles compatibles avec les liaisons les $\dot{q}_i^{\,*}$ qui vérifient les équations précédentes. Sachant que les vitesses virtuelles sont indépendantes du temps t on aura alors:

- **C.V.V compatible avec les liaisons holonomes:**

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial q_1}\dot{q}_1^{\,*} + \cdots + \frac{\partial F_\alpha}{\partial q_i}\dot{q}_i^{\,*} + \cdots + \frac{\partial F_\alpha}{\partial q_n}\dot{q}_n^{\,*} = 0 \qquad \alpha = 1, \ldots, h \qquad (1.\ 11)$$

- **C.V.V compatible avec les liaisons non holonomes:**

$$a_{\alpha 1}\dot{q}_1^{\,*} + \cdots + a_{\alpha i}\dot{q}_i^{\,*} + \cdots + a_{\alpha n}\dot{q}_n^{\,*} = 0 \qquad \alpha = 1, \ldots, l \qquad (1.12)$$

3- Principe des travaux virtuels

3- 1- Principe fondamentale de la dynamique

On considère un système de N points matériels de masse m_α, soumis à des forces.

Les forces peut se décomposer en des forces actives ($\overrightarrow{F_a^\alpha}$: qui crées le mouvement) et des forces de contrainte ($\overrightarrow{F_l^\alpha}$) (ou de liaisons).

Le principe fondamentale de la dynamique , appliqué sur chaque point α s'écrit sous la forme.

$$\overrightarrow{F^\alpha} = \overrightarrow{F_a^\alpha} + \overrightarrow{F_l^\alpha} = m_\alpha \overrightarrow{\gamma^\alpha} \qquad (1.\ 13)$$

Pour l'ensemble de N points matériels, on écrit :

$$\sum_\alpha^N \overrightarrow{F^\alpha} = \sum_\alpha^N (\overrightarrow{F_a^\alpha} + \overrightarrow{F_l^\alpha}) = \sum_\alpha^N \overrightarrow{F_a^\alpha} + \sum_\alpha^N \overrightarrow{F_l^\alpha} = \sum_\alpha^N m_\alpha \overrightarrow{\gamma^\alpha}$$

C.-à-d.:

$$\sum_\alpha^N \overrightarrow{F^\alpha} = \sum_\alpha^N \overrightarrow{F_a^\alpha} + \sum_\alpha^N \overrightarrow{F_l^\alpha} = \sum_\alpha^N m_\alpha \overrightarrow{\gamma^\alpha} = \sum_\alpha^N \frac{d\overrightarrow{p^\alpha}}{dt} \qquad (1.\ 14)$$

Tout problème de dynamique peut se ramener à un problème de statique, simplement en écrivant que,

$$\sum_\alpha^N \overrightarrow{F^\alpha} - \sum_\alpha^N \frac{d\overrightarrow{p^\alpha}}{dt} = 0 \qquad (1.\ 15)$$

en considérant que les forces d'inertie $\sum_\alpha^N \frac{d\overrightarrow{p^\alpha}}{dt}$ sont des forces appliquées.

3- 2- Travail virtuel élémentaire (TV)

3- 2- 1- Définition : À une date quelconque t, on appelle *travail virtuel élémentaire* (noté T.V.) d'une force $\vec{F}$, appliquée à un point M d'un système, le travail élémentaire de $\vec{F}$ dans un déplacement virtuel élémentaire, δM , à cette date s'écrit:

$$\delta W = \vec{F}.\delta\overrightarrow{M} \quad (1.16)$$

Pour N points matériels :

$$\delta W = \sum_{\alpha}^{N} \overrightarrow{F^{\alpha}} . \delta \overrightarrow{r^{\alpha}} = \sum_{\alpha}^{N} (\overrightarrow{F_a^{\alpha}} + \overrightarrow{F_l^{\alpha}}) . \delta \overrightarrow{r^{\alpha}} \qquad (1.\ 17)$$

A l'équilibre

$$\delta W = \sum_{\alpha}^{N} \overrightarrow{F^{\alpha}} . \delta \overrightarrow{r^{\alpha}} = \sum_{\alpha}^{N} (\overrightarrow{F_a^{\alpha}} + \overrightarrow{F_l^{\alpha}}) . \delta \overrightarrow{r^{\alpha}} = 0 \qquad (1.\ 18)$$

3-2- 2- Condition des travaux virtuels : Hypothèses

$$\sum_{\alpha}^{N} \overrightarrow{F_l^{\alpha}} . \delta \overrightarrow{r^{\alpha}} = 0 \qquad (1.\ 19)$$

$\overrightarrow{F_l^{\alpha}}$: Force de liaison s'exerçant sur le point α ;

$\delta \overrightarrow{r^{\alpha}}$: $\alpha = 1, \ldots . N$: Déplacement virtuel compatible ;

On ne considérera que des liaisons qui respectent cette condition (liaisons parfaites), c'est-à-dire que la somme des travaux est nulle pour tout déplacement virtuel compatible

Remarque : Notez bien qu'individuellement les forces de contrainte peuvent travailler lors d'un déplacement virtuel.

3-2- 3-Principe des travaux virtuels en statique

En absence de frottements et en appliquant le principe des travaux virtuels en statique pour des $\delta \overrightarrow{r^{\alpha}}$ compatibles entre eux et avec les liaisons, on obtient :

$$\sum_{\alpha}^{N} \overrightarrow{F_a^{\alpha}} . \delta \overrightarrow{r^{\alpha}} = \vec{0} \qquad (1.\ 20)$$

C'est le principe d'Alembert en statique

NB : les forces de liaisons sont éliminées, par l'introduction des déplacements virtuels compatibles avec les contraintes.

3-2- 4-Principe des travaux virtuels en dynamique

Pour tout déplacement virtuel compatible avec les contraintes :

$$\sum_{\alpha}^{N} (m_{\alpha} \overrightarrow{\gamma^{\alpha}} - \overrightarrow{F^{\alpha}}) . \delta \overrightarrow{r^{\alpha}} = \vec{0} \qquad (1.\ 21)$$

On d'autres termes, la somme des travaux des forces appliqués (actives) et des forces d'inertie est nulle pour tout déplacement virtuel compatible avec les contraintes.

Principe d'Alembert : 2eme énoncé

Le travail des forces extérieures et intérieures d'un système lors d'un déplacement virtuel est égal au travail virtuel de la quantité des accélérations du système.

4- Force généralisée et accélération généralisée

Pour tout déplacement virtuel compatible avec les contraintes :

$$\boldsymbol{\delta\overrightarrow{r^{\alpha}} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \overrightarrow{r^{\alpha}}}{\partial q_i} \delta q_i}$$

$$\sum_{\alpha}^{N} (m_{\alpha}\overrightarrow{\gamma^{\alpha}} - \overrightarrow{F^{\alpha}}).\,\delta\overrightarrow{r^{\alpha}} = \vec{0}$$

$$\sum_{\alpha}^{N} (m_{\alpha}\overrightarrow{\gamma^{\alpha}} - \overrightarrow{F^{\alpha}}).\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \overrightarrow{r^{\alpha}}}{\partial q_i} \delta q_i = \vec{0}$$

$$\forall \quad \delta q_i \quad ; \quad \sum_{i}^{n}\sum_{\alpha}^{N} (m_{\alpha}\overrightarrow{\gamma^{\alpha}} \frac{\partial \overrightarrow{r^{\alpha}}}{\partial q_i} - \overrightarrow{F^{\alpha}} \frac{\partial \overrightarrow{r^{\alpha}}}{\partial q_i}) \,.\, \delta q_i = 0$$

Comme nous avons supposé le système holonome, tous les δq_i sont indépendants et l'on obtient:

$$\forall\, i = 1, \ \ldots, N \ ; \sum_{\alpha}^{N} m_{\alpha}\overrightarrow{\gamma^{\alpha}} \frac{\partial \overrightarrow{r^{\alpha}}}{\partial q_i} - \sum_{\alpha}^{N} \overrightarrow{F^{\alpha}} \frac{\partial \overrightarrow{r^{\alpha}}}{\partial q_i} = 0 \qquad (1.\ 22)$$

On appelle force généralisée la quantité définie par :

$$Q_i = \sum_{\alpha}^{N} \overrightarrow{F^{\alpha}} \frac{\partial \overrightarrow{r^{\alpha}}}{\partial q_i} \qquad (1.\ 23)$$

$\mathbf{Q_i}$: Force généralisée associe à q_i

On définit la quantité d'accélération généralisée comme suit :

$$A_i = \sum_{\alpha}^{N} m_{\alpha}\overrightarrow{\gamma^{\alpha}} \frac{\partial \overrightarrow{r^{\alpha}}}{\partial q_i} \qquad (1.\ 24)$$

Reprenons l'expression du travail virtuel, mais cette fois-ci en utilisant l'expression de l'accélération $(m_{\alpha} = cte)$:

$$\delta W = \sum_{\alpha}^{N} m_{\alpha}\overrightarrow{\gamma^{\alpha}} \,.\, \delta\overrightarrow{r^{\alpha}} = \sum_{\alpha}^{N} m_{\alpha}\dot{\overrightarrow{v^{\alpha}}} \,.\, \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \overrightarrow{r^{\alpha}}}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i}^{N} A_i \delta q_i \qquad (1.\ 25)$$

A_i est la i^{ème} composante de l'accélération généralisée :

$$A_i = \sum_{\alpha}^{N} m_{\alpha}\dot{\overrightarrow{v^{\alpha}}} \,.\, \frac{\partial \overrightarrow{r^{\alpha}}}{\partial q_i}$$

5- Le travail virtuel et force généralisée

$$\delta W\left(\overrightarrow{F_a^{\alpha}}\right) = \sum_{\alpha}^{N} \overrightarrow{F_a^{\alpha}} \,.\, \delta\overrightarrow{r_{\alpha}} = \sum_{\alpha}^{N} \overrightarrow{F_a^{\alpha}} \,.\, \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \overrightarrow{r_{\alpha}}}{\partial q_i} \delta q_i$$

$$\delta W\left(\overrightarrow{F_a^{\alpha}}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{\alpha=1}^{N}\overrightarrow{F_a^{\alpha}}.\frac{\partial\overrightarrow{r_{\alpha}}}{\partial q_i}\right)\delta q_i = \sum_{i=1}^{n} Q_i\,.\,\delta q_i \qquad (1.\ 26)$$

$$Q_i = \sum_{\alpha=1}^{N}\overrightarrow{F_a^{\alpha}}.\frac{\partial\overrightarrow{r^{\alpha}}}{\partial q_i}$$

Q_i: force généralisée associe à q_i

La dimension de Q_i est telle que $Q_i q_i$ à la dimension de l'énergie

• Si les forces dérivent d'une énergie potentielle V :

$$Q_i = \sum_{\alpha=1}^{N}\overrightarrow{F_a^{\alpha}}.\frac{\partial\overrightarrow{r^{\alpha}}}{\partial q_i} = \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k=1}^{3}\overrightarrow{F_a^{\alpha,k}}.\frac{\partial\overrightarrow{r^{\alpha,k}}}{\partial q_i} = \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k=1}^{3} -\frac{\partial V}{\partial\overrightarrow{r^{\alpha,k}}}\frac{\partial\overrightarrow{r^{\alpha,k}}}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \qquad (1.\ 27)$$

Le même traitement peut se faire pour les forces de liaison $\overrightarrow{F_l^{\alpha}}$ *et les forces d'inertie*

$\frac{d\overrightarrow{p^{\alpha}}}{dt} = \overrightarrow{F_i^{\alpha}}$ $(1.\ 28)$.

- $\{Q_i{}^{l}\}$ est appelé ensemble des forces de liaisons généralisées tel que :

$$Q_i{}^{l} = \sum_{\alpha=1}^{N}\overrightarrow{F_l^{\alpha}}.\frac{\partial\overrightarrow{r^{\alpha}}}{\partial q_i} \qquad (1.\ 29)$$

- $\{Q_i{}^{i}\}$ est appelé ensemble des forces d'inertie généralisées tel que :

$$Q_i{}^{i} = \sum_{\alpha=1}^{N}\overrightarrow{F_i^{\alpha}}.\frac{\partial\overrightarrow{r^{\alpha}}}{\partial q_i} \qquad (1.\ 30)$$

Sachant que : $\overrightarrow{F_a^{\alpha}} + \overrightarrow{F_l^{\alpha}} + \overrightarrow{F_i^{\alpha}} = 0$ $(1.\ 31)$

Or :

$$Q_i + Q_i{}^{l} + Q_i{}^{i} = \sum_{\alpha=1}^{N}\overrightarrow{F_a^{\alpha}}.\frac{\partial\overrightarrow{r^{\alpha}}}{\partial q_i} + \sum_{\alpha=1}^{N}\overrightarrow{F_l^{\alpha}}.\frac{\partial\overrightarrow{r^{\alpha}}}{\partial q_i} + \sum_{\alpha=1}^{N}\overrightarrow{F_i^{\alpha}}.\frac{\partial\overrightarrow{r^{\alpha}}}{\partial q_i}$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{N}\left(\overrightarrow{F_a^{\alpha}} + \overrightarrow{F_l^{\alpha}} + \overrightarrow{F_i^{\alpha}}\right).\frac{\partial\overrightarrow{r^{\alpha}}}{\partial q_i}$$

On a :

$$\overrightarrow{F_a^{\alpha}} + \overrightarrow{F_l^{\alpha}} + \overrightarrow{F_i^{\alpha}} = 0$$

Donc : $Q_i + Q_i{}^{l} + Q_i{}^{i} = 0$ $(1.\ 32)$

Alors ∀ "i" *la somme de toutes les forces généralisées est nul, on vient de monter que :*

$$(1.30) \Leftrightarrow (1.32)$$

- Les coordonnées q_i sont quelconque et pas forcément indépendantes. Donc partant de P.T.V. :

$$\delta W(\overrightarrow{F_a^{\alpha}}) + \delta W(\overrightarrow{F_l^{\alpha}}) + \delta W(\overrightarrow{F_i^{\alpha}}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \mathbf{Q_i} \,.\, \delta q_i \; + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{Q_i}^{l} \,.\, \delta q_i + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{Q_i}^{i} \,.\, \delta q_i = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{Q_i} + \mathbf{Q_i}^{l} + \boldsymbol{Q_i}^{i}).\, \delta q_i = 0 \quad \nRightarrow \mathbf{Q_i} + \mathbf{Q_i}^{l} + \boldsymbol{Q_i}^{i} = 0 \;\; si \; \{q_i\} \; sont \; liées$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{Q_i} + \mathbf{Q_i}^{l} + \mathbf{Q_i}^{i}).\, \delta q_i = 0 \Longrightarrow \mathbf{Q_i} + \mathbf{Q_i}^{l} + \mathbf{Q_i}^{i} = 0 \quad \text{si } \{q_i\} \text{ sont indépendants}$$

Mais la relation est vérifiée ∀ les coordonnées $\{q_i\}$.

6- Force généralisée et accélération généralisée dans un référentiel non galiléen

Les relations précédentes sont établies dans un référentiel galiléen.

Dans le cas où le référentiel n'est pas galiléen, comme le PFD s'écrit dans un référentiel non galiléen comme suit:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{\alpha}^{N} \overrightarrow{F_a^{\alpha}} + \overrightarrow{f_{in}^{\alpha}} \qquad (1.\ 33)$$

- $\overrightarrow{f_{in}^{\alpha}}$: Les forces d'inertie
- Q_{in}^{i}: Les forces généralisées d'inertie

$$A_i = Q_i + Q_{in}^{i} \qquad (1.\ 34)$$

$$Q_{in}^{i} = \sum_{\alpha}^{N} \overrightarrow{f_{in}^{\alpha}} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{r^{\alpha}}}{\partial q_i} \qquad (1.\ 35)$$

7- Décomposition de l'énergie cinétique

L'expression de l'énergie cinétique s'écrit comme suit :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} m_{\alpha} \dot{\overrightarrow{r^{\alpha}}}^{2} \qquad (1.\ 36)$$

Nous remplaçons

$$\dot{\overrightarrow{r^{\alpha}}} = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \overrightarrow{r^{\alpha}}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \overrightarrow{r^{\alpha}}}{\partial t}$$

Sachant que $\vec{r}_i(q_i, t)$

On écrit donc :

$$\boldsymbol{T = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \overrightarrow{r^\alpha}}{\partial q_k}\, \dot{q}_k + \frac{\partial \overrightarrow{r^\alpha}}{\partial t}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \overrightarrow{r^\alpha}}{\partial q_k}\, \dot{q}_k\right)^2 + \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \overrightarrow{r^\alpha}}{\partial q_k}\, \dot{q}_k . \frac{\partial \overrightarrow{r^\alpha}}{\partial t}$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \overrightarrow{r^\alpha}}{\partial t}\right)^2 \qquad (1.\ 37)$$

L'énergie cinétique est de la forme : $T = T_0 + T_1 + T_2$

Tel que :

$$T_0 = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left(\frac{\partial \overrightarrow{r^\alpha}}{\partial t}\right)^2 \qquad (1.\ 38)$$

$$T_1 = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \frac{\partial \overrightarrow{r^\alpha}}{\partial t}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \overrightarrow{r^\alpha}}{\partial q_k}\, \dot{q}_k\right) \qquad (1.\ 39)$$

$$T_2 = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \overrightarrow{r^\alpha}}{\partial q_k}\, \dot{q}_k\right)^2 \qquad (1.\ 40)$$

Cas particuliers :

Cas d'un système à liaison scléronome :

$$\overrightarrow{r^\alpha} = \overrightarrow{r^\alpha}(\mathbf{q_k}) \Rightarrow \frac{\partial \overrightarrow{r^\alpha}}{\partial t} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{T_0 = 0} \\ \mathbf{T_1 = 0} \end{cases}$$

$$\mathbf{T = T_2}$$

Dans le cas d'un système à liaison scléronome, l'énergie cinétique s'écrit sous forme quadratique de vitesse généralisée.