Série N°1

Exercice N°1

Soit à déterminer la masse volumique (ρ) de la substance d'un cube homogène à partir de la mesure de sa masse (m) et de son arête (a). Calculer l'incertitude absolue et l'incertitude relative et écrire le résultat de la mesure.

Exercice N°2

Une masse m oscille à l'extrémité d'un ressort horizontal de constante de raideur k avec une amplitude X_0.

En admettant que sa période T ne dépende que de m, k et X_0, déterminer l'expression littérale de T.

Exercice N°3

On considère les vecteurs suivants : $\overrightarrow{V_1} = 5t^3\,\vec{\imath} + 3t\,\vec{\jmath} - 2t^4\,\vec{k}$ et $\overrightarrow{V_1} = \sin t\,\vec{\imath} - \cos t\,\vec{\jmath} + 3t\,\vec{k}$, avec $(\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k})$ une base fixe.

Trouver les expressions des grandeurs : $\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2}\right)$, $\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{V_1}\wedge\overrightarrow{V_2}\right)$ et $\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_1}\right)$

Exercice N°4

On donne la fonction $x(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$.

1- Montrer que x(t) peut s'écrire encore sous la forme $x(t) = A\cos(\omega t - \varphi)$;

2- Etablir la relation entre x(t) et sa dérivée seconde par rapport au temps.

Exercice N°5

Par rapport à un repère $\mathbf{R}(\mathbf{O},\vec{\mathbf{i}}\,,\vec{\mathbf{j}},\vec{\mathbf{k}})$ orthonormé et direct, muni de la base $(\vec{\mathbf{i}}\,,\vec{\mathbf{j}},\vec{\mathbf{k}})$, on considère les vecteurs : $\vec{\mathbf{A}} = \mathbf{3t^2}\vec{\mathbf{j}} + \mathbf{t}\vec{\mathbf{k}}$ **et** $\vec{\mathbf{B}} = -\mathbf{2}\vec{\mathbf{i}} + \mathbf{3t^3}\vec{\mathbf{j}}$

1- Calculer le produit scalaire $\vec{\mathbf{A}}.\vec{\mathbf{B}}$ et en déduire le cosinus de l'angle entre $\vec{\mathbf{A}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$ en fonction de **t**.

2- Déterminer les cosinus directeurs des vecteurs $\vec{\mathbf{A}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$

3- Calculer les composantes du vecteur $\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} \wedge \vec{\mathbf{B}}$ et son module.

4- Calculer le produit mixte $(\vec{\mathbf{A}},\vec{\mathbf{B}},\vec{\mathbf{C}})$ en utilisant les propriétés du produit mixte.

5- Calculer la valeur du double produit vectoriel $\vec{\mathbf{A}}\wedge(\vec{\mathbf{B}}\wedge\vec{\mathbf{C}})$, par deux méthodes différentes.

Exercice N°6

Dans un repère R(O, x, y, z), orthonormé direct, les coordonnés cartésiennes d'une particule M sont donnés par : $\begin{cases} x = 2t \\ y = 4\,t^2 - 4t \end{cases}$ t est le temps

1- Déterminer l'équation de la trajectoire de M. Représenter l'allure de cette trajectoire.

2- Calculer le vecteur vitesse $\vec{V}(M)$. Représenter $\vec{V}(M)$.

2- Calculer le vecteur accélération $\vec{\gamma}(M)$. Représenter $\vec{\gamma}(M)$.

Exercice N°7

Dans le plan XOY du repère R(O, X, Y, Z), orthonormé direct une particule M est repérée par ses coordonnées polaires ρ et φ telles que $\begin{cases} \rho = 1 \\ \varphi = \frac{1}{2}\alpha\,t^2 \end{cases}$ (α est une constante positive)

1- Trouver l'expression de l'équation de la trajectoire de M en coordonnées cartésiennes.
En déduire la nature de la trajectoire de M.
2- Dans la base $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi})$ associée au système de coordonnées polaires. Donner :

L'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$;

L'expression du vecteur vitesse $\vec{V}(M/R)$, En déduire son module ;

L'expression du vecteur accélération $\vec{\gamma}(M)$. En déduire son module.

3- Calculer l'abscisse curviligne s(t) du point M sachant qu'à l'instant $t = 0$; $s(0) = 0$.

Exercice N°8

Un point **M** est repéré dans **(xOy)** par les coordonnées polaires, $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{t}) = \|\overrightarrow{\mathbf{OM}}\|$ et $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{t}) = (\widehat{\overrightarrow{\mathbf{OM}}, \mathbf{Ox}})$. Soit $\vec{\mathbf{u}}$ le vecteur unitaire de même direction et sens que $\overrightarrow{\mathbf{OM}}$.

1- Tracer dans le plan **(xOy)** le point **M** en y précisant les coordonnées polaires **ρ** et **θ**;
2- Ecrire l'expression de $\vec{\mathbf{u}}$ dans la base ($\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$) ;
3- Calculer la dérivée de $\vec{\mathbf{u}}$ par rapport à **θ**; on note $\vec{\mathbf{v}}$ ce vecteur ;
4- Calculer le produit scalaire des vecteurs $\vec{\mathbf{u}}$ et $\vec{\mathbf{v}}$; conclure ;
5- Calculer la dérivée de $\vec{\mathbf{v}}$ par rapport à **θ** que constater vous ?
6- Calculer les dérivées première et seconde par rapport au temps de $\vec{\mathbf{u}}$.

Exercice N°9 : Différentielle et dérivée d'un vecteur unitaire (Facultatif)

Considérons la position d'un point M dans le repère R(O, xyz).
Soient $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi}, \vec{k})$ et $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$ respectivement les bases cartésienne, cylindrique et sphérique associées à ce repère.

1. Calculer : $\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{d\varphi}$, $\frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{d\varphi}$ et $\frac{d\vec{k}}{d\varphi}$
2. En déduire $d\overrightarrow{e_\rho}$ et $d\overrightarrow{e_\varphi}$ dans la base cartésienne.
3. Montrer que les différentielles des vecteurs de la base cylindrique peuvent se mettre sous la forme :

$$d\overrightarrow{e_\rho} = dt\ \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{e_\rho} \qquad \text{et} \qquad d\overrightarrow{e_\varphi} = dt\ \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{e_\varphi}$$

Déduire les dérivées par rapport au temps des vecteurs de la base cylindrique dans R.

4. Quel est le vecteur rotation de la base sphérique par rapport à R?

En utilisant les résultats de la question précédente, déduire les expressions de :

$$\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} \quad , \quad \frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{dt}$$