

Correction de série N°1 : Calcul vectoriel

Exercice N°1

On donne les vecteurs suivants :

$$\vec{r}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}, \quad \vec{r}_2 = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}, \quad \vec{r}_3 = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$$

1- Calculer leurs modules.

2- Calculer les composantes et les modules des vecteurs :

$$\vec{A} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 \quad \vec{B} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 - \vec{r}_3$$

3- Déterminer le vecteur unitaire $\vec{u}$ porté par le vecteur $\vec{C} = \vec{r}_1 + 2\vec{r}_2$

4- Calculer les produit scalaire et vectoriel des vecteurs $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$.

5- Calculer les produits $\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C})$ et $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C})$

Correction de l'exercice N°1

$$1- \|\vec{r}_1\| = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14} \quad \|\vec{r}_2\| = \sqrt{9 + 4 + 4} = \sqrt{17} \quad \|\vec{r}_3\| = \sqrt{16 + 9 + 9} = \sqrt{34}$$

2- Calcul des composantes et des modules des vecteurs :

$$\vec{A} = 9\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k} \quad \|\vec{A}\| = \sqrt{81 + 4 + 16} = \sqrt{101}$$

$$\vec{B} = 1\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k} \quad \|\vec{B}\| = \sqrt{1 + 16 + 4} = \sqrt{21}$$

3- Détermination du vecteur unitaire $\vec{u}$ porté par le vecteur $\vec{C} = \vec{r}_1 + 2\vec{r}_2$

$$\vec{C} = \vec{r}_1 + 2\vec{r}_2 = 8\vec{i} - 1\vec{j} + 3\vec{k} \quad \|\vec{C}\| = \sqrt{64 + 1 + 9} = \sqrt{74}$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{C}}{\|\vec{C}\|} = \frac{8\vec{i} - 1\vec{j} + 3\vec{k}}{\sqrt{74}}$$

4- Calcul des produit scalaire et vectoriel des vecteurs $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$.

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = -6 - 6 - 2 = -14$$

$$\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 7\vec{j} - 13\vec{k}$$

5- Calcul des produits $\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C})$ et $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C})$

$$\vec{B} \wedge \vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & -2 \\ 8 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 10\vec{i} - 19\vec{j} - 33\vec{k}$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = 90 + 38 + 132 = -4$$

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 9 & -2 & 4 \\ 10 & -19 & -33 \end{vmatrix} = 142\vec{i} + 337\vec{j} - 151\vec{k}$$

Exercice N°2

On considère les vecteurs suivants ;

$$\vec{V}_1 = \sin t \vec{i} - \cos t \vec{j} + 3t \vec{k}$$

$$\vec{V}_2 = 5t^3 \vec{i} - 3t \vec{j} - 2t^4 \vec{k}$$

1- Calculer le module de ces deux vecteurs

2-Trouver les expressions des grandeurs :

$$\frac{d}{dt}(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)$$

Correction de l'exercice N°2

1- Calcul du module de ces deux vecteurs

$$\|\vec{V}_1\| = \sqrt{1 + 9t^2} \quad \|\vec{V}_2\| = \sqrt{25t^6 + 9t^2 + 4t^8}$$

2- Les expressions des grandeurs

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 5t^3 \sin t + 3t \cos t - 6t^5$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) = \frac{d}{dt}(5t^3 \sin t + 3t \cos t - 6t^5) = 15t^2 \sin t + 5t^3 \cos t + 3 \cos t - 33t \sin t - 30t^4$$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ \sin t & -\cos t & 3t \\ 5t^3 & -3t & -2t^4 \end{vmatrix} = (2t^4 \cos t - 9t^2)\vec{i} + (2t^4 \sin t + 15t^4)\vec{j} + (-3t \sin t + 5t^3 \cos t)\vec{k}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) &= \frac{d}{dt}[(2t^4 \cos t - 9t^2)\vec{i} + (2t^4 \sin t + 15t^4)\vec{j} + (-3t \sin t + 5t^3 \cos t)\vec{k}] \\ &= (8t^3 \cos t - 2t^4 \sin t - 18t)\vec{i} + (8t^3 \sin t + 2t^4 \cos t + 60t^3)\vec{j} \\ &\quad + (-3 \sin t - 3t \cos t + 15t^2 \cos t - 5t^3 \sin t)\vec{k} \end{aligned}$$

Exercice N°3

Soit les trois vecteurs : $\vec{a}(1, 2, 2)$, $\vec{b}(2, 2\sqrt{2}, 2)$ et $\vec{c}(0, \sqrt{2}, \sqrt{2})$.

1- Calculer $\|\vec{a}\|$, $\|\vec{b}\|$, $\|\vec{c}\|$, et en déduire les expressions des vecteurs unitaires $\vec{e}_a$, $\vec{e}_b$, $\vec{e}_c$ des directions de $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$.

2- En considérant les angles θ_a , θ_b et θ_c compris entre $\vec{0}$ et π , calculer :

$$\cos \theta_a = \cos(\widehat{\vec{e}_b, \vec{e}_c}), \quad \cos \theta_b = \cos(\widehat{\vec{e}_a, \vec{e}_c}) \quad \text{et} \quad \cos \theta_c = \cos(\widehat{\vec{e}_b, \vec{e}_a})$$

3- Calculer les composantes des vecteurs : $\vec{u}_a = \vec{e}_b \wedge \vec{e}_c$, $\vec{u}_b = \vec{e}_c \wedge \vec{e}_a$ et $\vec{u}_c = \vec{e}_a \wedge \vec{e}_b$.

4- En déduire $\sin \theta_a$, $\sin \theta_b$ et $\sin \theta_c$. Vérifier ces résultats à l'aide de la question 2).

Correction de l'exercice N°3

1- Calcul de $\|\vec{a}\|$, $\|\vec{b}\|$, $\|\vec{c}\|$:

$$* \|\vec{a}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$* \|\vec{b}\| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{2})^2 + 2^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$* \|\vec{c}\| = \sqrt{0^2 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2$$

En déduire les expressions des vecteurs unitaires $\vec{e}_a$, $\vec{e}_b$ et $\vec{e}_c$

* $\vec{e}_a$ est vecteur unitaire de $\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \|\vec{a}\| \vec{e}_a$

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}}{3} = \frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$$

* $\vec{e}_b$ est vecteur unitaire de $\vec{b} \Rightarrow \vec{b} = \|\vec{b}\| \vec{e}_b$

$$\vec{e}_b = \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} = \frac{2\vec{i} + 2\sqrt{2}\vec{j} + 2\vec{k}}{4} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}$$

* $\vec{e}_c$ est vecteur unitaire de $\vec{c} \Rightarrow \vec{c} = \|\vec{c}\| \vec{e}_c$

$$\vec{e}_c = \frac{\vec{c}}{\|\vec{c}\|} = \frac{\sqrt{2}\vec{j} + \sqrt{2}\vec{k}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}$$

2- calcul de $\cos \theta_a = \cos(\widehat{\vec{e}_b, \vec{e}_c})$, $\cos \theta_b = \cos(\widehat{\vec{e}_a, \vec{e}_c})$ et $\cos \theta_c = \cos(\widehat{\vec{e}_b, \vec{e}_a})$

Sachant que : $\|\vec{e}_a\| = \|\vec{e}_b\| = \|\vec{e}_c\| = 1$ ($\vec{e}_a$, $\vec{e}_b$ et $\vec{e}_c$ sont des vecteurs unitaires)

* $\cos \theta_a = \cos(\widehat{\vec{e}_b, \vec{e}_c}) = ?$: on utilise le produit scalaire entre $\vec{e}_b$ et $\vec{e}_c$.

$$\vec{e}_b \cdot \vec{e}_c = \|\vec{e}_b\| \times \|\vec{e}_c\| \cos \theta_a \Leftrightarrow \cos \theta_a = \frac{\vec{e}_b \cdot \vec{e}_c}{\|\vec{e}_b\| \times \|\vec{e}_c\|} = \vec{e}_b \cdot \vec{e}_c$$

AN :

$$\cos \theta_a = \cos(\widehat{\vec{e}_b, \vec{e}_c}) = \left(\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}\right) = \frac{2}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{2+\sqrt{2}}{4} = 0,85$$

De même :

$$\cos \theta_b = \cos(\widehat{\vec{e}_a, \vec{e}_c}) = \left(\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3} = 0,9428$$

$$\cos \theta_c = \cos(\widehat{\vec{e}_b, \vec{e}_a}) = \left(\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}\right) = \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{3} = 0,97$$

3- Calcul des composantes des vecteurs : $\vec{u}_a = \vec{e}_b \wedge \vec{e}_c$, $\vec{u}_b = \vec{e}_c \wedge \vec{e}_a$ et $\vec{u}_c = \vec{e}_a \wedge \vec{e}_b$.

$$* \vec{u}_a = \vec{e}_b \wedge \vec{e}_c = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{4} \vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{4} \vec{k}$$

$$* \vec{u}_b = \vec{e}_c \wedge \vec{e}_a = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{6} \vec{j} - \frac{\sqrt{2}}{6} \vec{k}$$

$$* \vec{u}_c = \vec{e}_a \wedge \vec{e}_b = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1-\sqrt{2}}{3} \vec{i} + \frac{1}{6} \vec{j} + \frac{\sqrt{2}-2}{6} \vec{k}$$

4- En déduisant $\sin\theta_a$, $\sin\theta_b$ et $\sin\theta_c$

$$\sin\theta_a = \sin(\widehat{\vec{e}_b, \vec{e}_c}) = \frac{\|\vec{e}_b \wedge \vec{e}_c\|}{\|\vec{e}_b\| \times \|\vec{e}_c\|} = \|\vec{e}_b \wedge \vec{e}_c\| = \sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = 0.521$$

Vérification : $\sin\theta_a = \sqrt{1 - \cos^2\theta_a} = 0.521$

De même :

$$\sin\theta_b = \sin(\widehat{\vec{e}_a, \vec{e}_c}) = \frac{\|\vec{e}_c \wedge \vec{e}_a\|}{\|\vec{e}_c\| \times \|\vec{e}_a\|} = \|\vec{e}_c \wedge \vec{e}_a\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2} = \frac{1}{3} = 0.33$$

Vérification : $\sin\theta_b = \sqrt{1 - \cos^2\theta_b} = 0.33$

$$\sin\theta_c = \sin(\widehat{\vec{e}_b, \vec{e}_a}) = \frac{\|\vec{e}_a \wedge \vec{e}_b\|}{\|\vec{e}_a\| \times \|\vec{e}_b\|} = \|\vec{e}_a \wedge \vec{e}_b\| = \sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}-2}{6}\right)^2} = 0.237$$

Vérification : $\sin\theta_c = \sqrt{1 - \cos^2\theta_c} = 0.237$

Exercice N°4

Soit un vecteur $\vec{v}(t)$ de module V et un référentiel R .

1- Peut-on dire que la dérivée de $\vec{v}(t)$ est égale à la dérivée du module de $\vec{v}(t)$?

2- Montrer que si $\vec{v}(t)$ a un module constant, le vecteur dérivé $\frac{d\vec{v}(t)}{dt}$ lui est orthogonal.

3- Montrer que, d'une manière générale : $\vec{v}(t) \cdot \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = V \frac{dV}{dt}$.

Correction de l'exercice N°4

Soit $\vec{v}(t) = V(t) \vec{u}$

$\vec{v}(t)$ vecteur et $V(t)$ son module et $\vec{u}$ vecteur unitaire associé à $\vec{v}(t)$

1- $\left\| \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \right\| = \frac{dV}{dt}$?

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d(V(t) \vec{u})}{dt} = \frac{dV(t)}{dt} \vec{u} + V(t) \frac{d\vec{u}}{dt}$$

En générale $\frac{d\vec{u}}{dt}$ est la somme de deux autres vecteurs, il peut s'écrire sous la forme, par exemple, $\frac{d\vec{u}}{dt} = \alpha \vec{u}_1 + \beta \vec{u}_2$ ($\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont deux vecteurs unitaires).

Donc on peut écrire :

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d(V(t) \vec{u})}{dt} = \frac{dV(t)}{dt} \vec{u} + V(t) [\alpha \vec{u}_1 + \beta \vec{u}_2]$$

c.à.d: $\left\| \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \right\| = \sqrt{\left(\frac{dV(t)}{dt}\right)^2 + (V(t)\alpha)^2 + (V(t)\beta)^2}$

On pose $Q^2 = (V(t)\alpha)^2 + (V(t)\beta)^2 \neq 0$

$Q \neq 0 \Rightarrow \left\| \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \right\| \neq \frac{dV(t)}{dt}$

2- Le module $\vec{v}(t)$ est constant, alors : $\vec{v}^2(t) = \vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t) = \text{cste.}$

$$\frac{d\vec{v}^2(t)}{dt} = 2\vec{v}(t) \cdot \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{v}(t) \cdot \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = 0$$

Donc $\vec{v}(t)$ est perpendiculaire à $\frac{d\vec{v}(t)}{dt}$.

3- Montrons d'une manière générale : $\vec{v}(t) \cdot \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = v \frac{dv}{dt}$.

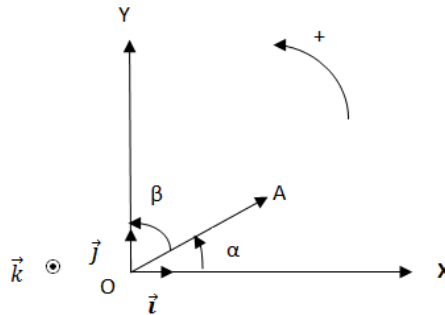
$$\begin{aligned} \vec{v}(t) \cdot \frac{d\vec{v}(t)}{dt} &= \vec{v}(t) \cdot \frac{d(V(t)\vec{u})}{dt} = v(t)\vec{u} \cdot \left(\frac{dV(t)}{dt} \vec{u} + V(t) \frac{d\vec{u}}{dt} \right) \\ &= v \frac{dv}{dt} (\vec{u} \cdot \vec{u}) + v^2(t) \vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} \end{aligned}$$

$\|\vec{u}\| = 1$ est un module constant d'après l'équation 2

$$\vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = 0 \quad \text{donc} \quad \vec{v}(t) \cdot \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = v \frac{dv}{dt}$$

Exercice N°5

Dans un repère $R(\mathbf{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé direct, on considère un vecteur $\vec{U} = \overrightarrow{OA}$ que fait un angle α avec l'axe $(\mathbf{O}, \vec{i})$ et un angle β avec l'axe $(\mathbf{O}, \vec{j})$ (Figure ci-dessous).



Exprimer:

- 1- le vecteur $\vec{U}$ en fonction de α , le module U et les vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
- 2- le vecteur $\vec{U}$ en fonction de β , le module U et les vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
- 3- Même questions de 1 et 2 si en faisant une rotation au sens positive suivant l'axe $(\mathbf{O}, \vec{k})$ de $\frac{\pi}{2}$.
- 4- Même questions de 1 et 2 si en faisant une rotation au sens négative suivant l'axe $(\mathbf{O}, \vec{k})$ de $\frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice N°5

1- l'expression du vecteur $\vec{U}$ en fonction de α , le module U et les vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

On a : $\vec{u} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_x} + \overrightarrow{A_xA}$ et $\overrightarrow{A_xA} = \overrightarrow{OA_y}$

$$\vec{u} = \overrightarrow{OA_x} + \overrightarrow{OA_y} = \vec{u}_x + \vec{u}_y$$

$$\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} \quad \text{avec} \quad u_x = u \cos \alpha \quad \text{et} \quad u_y = u \sin \alpha$$

$$\text{Avec : } \vec{u} = u \cos \alpha \vec{i} + u \sin \alpha \vec{j}$$

2- l'expression de vecteur $\vec{U}$ en fonction de β , le module U et les vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

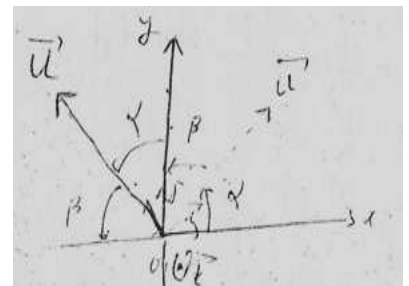
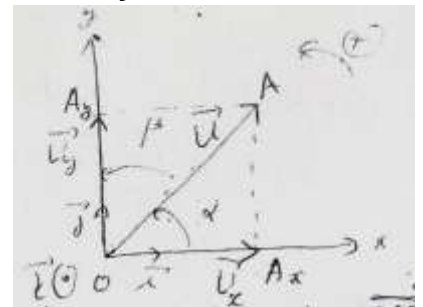
$$\text{On } u_x = u \sin \beta \quad \text{et} \quad u_y = u \cos \beta$$

$$\text{Donc : } \vec{u} = u \sin \beta \vec{i} + u \cos \beta \vec{j}$$

3-

✳ L'expression du vecteur $\vec{U}$ en fonction de α , le module U et les vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$, si en faisant une rotation au sens positive suivant l'axe $(\mathbf{O}, \vec{k})$ de $\frac{\pi}{2}$.

$$\vec{u} = -u \sin \alpha \vec{i} + u \cos \alpha \vec{j}$$



☀ l'expression de vecteur $\vec{U}$ en fonction de β , le module U et les vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$, si en faisant une rotation au sens positive suivant l'axe $(O, \vec{k})$ de $\frac{\pi}{2}$.

$$\vec{u} = -u \cos \beta \vec{i} + u \sin \beta \vec{j}$$

4- l'expression du vecteur $\vec{U}$ en fonction de α , le module U et les vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$, si en faisant une rotation au sens négative suivant l'axe $(O, \vec{k})$ de $\frac{\pi}{2}$.

* en fonction de α $\vec{u} = u \sin \alpha \vec{i} - u \cos \alpha \vec{j}$

* en fonction de β $\vec{u} = u \cos \beta \vec{i} - u \sin \beta \vec{j}$

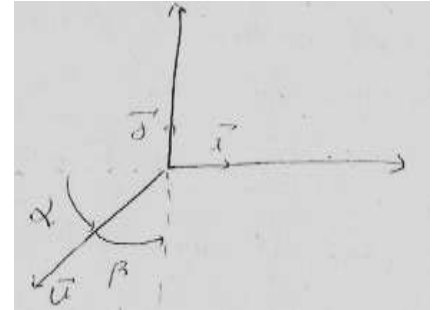
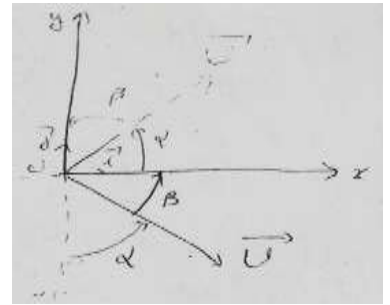
si en faisant une rotation au sens négative suivant l'axe $(O, \vec{k})$ de π .

* en fonction de α

$$\vec{u} = -u \cos \alpha \vec{i} - u \sin \alpha \vec{j}$$

* en fonction de β

$$\vec{u} = -u \sin \beta \vec{i} - u \cos \beta \vec{j}$$



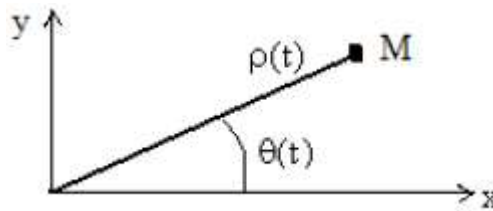
Exercice N°6

Un point M est repéré dans (xOy) par les coordonnées polaires, $\rho(t) = \|\vec{OM}\|$ et $\theta(t) = (\vec{OM}, \vec{Ox})$. Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire de même direction et sens que $\vec{OM}$.

- 1- Tracer dans le plan (xOy) le point M en y précisant les coordonnées polaires ρ et θ ;
- 2- Ecrire l'expression de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$;
- 3- Calculer la dérivée de $\vec{u}$ par rapport à θ ; on note $\vec{v}$ ce vecteur ;
- 4- Calculer le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$; conclure ;
- 5- Calculer la dérivée de $\vec{v}$ par rapport à θ que constater vous ?
- 6- Calculer les dérivées première et seconde par rapport au temps de $\vec{u}$.

Correction de l'exercice N°6

- 1- Traçage du point M , dans le plan (xOy) , en précisant les coordonnées polaires ρ et θ



- 2- L'expression de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$

$$\vec{u} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}.$$

- 3- On calcul la dérivée de $\vec{u}$ par rapport à θ ; on note $\vec{v}$ ce vecteur

$$\vec{v} = \frac{d\vec{u}}{d\theta} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$$

- 4- Calcul du produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

On vérifie que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ donc tout vecteur unitaire est orthogonal à son vecteur dérivée

- 5- Calcul de la dérivée de $\vec{v}$ par rapport à θ

$$\frac{d\vec{v}}{d\theta} = -\cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j} = -\vec{u}$$

Ce vecteur est perpendiculaire à $\vec{v}$ donc parallèle à $\vec{u}$

- 6- Calcul des dérivées première et seconde par rapport au temps de $\vec{u}$.

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \dot{\theta} \vec{v} \quad \text{et} \quad \frac{d^2\vec{u}}{dt^2} = \ddot{\theta} \vec{v} - \dot{\theta}^2 \vec{u}$$

Exercice N°7

Soit le référentiel $\mathbf{R}(\mathbf{O}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ et la base $\mathbf{B}(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Dans le plan $(\mathbf{Oxy})$, on considère un point $\mathbf{P}$ mobile le long d'une courbe $(\mathbf{C})$ en tout point de laquelle on peut définir un vecteur tangent $\vec{V}$. Le point $\mathbf{P}$ est successivement repéré dans les bases : $\mathbf{B}(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$, $\mathbf{B}'(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et $\mathbf{B}''(\vec{e}_t, \vec{e}_n)$

On pose $(\vec{Ox}, \vec{e}_r) = \theta$ et $(\vec{Ox}, \vec{e}_t) = \varphi$.

Exprimer:

- 1- Les vecteurs unitaires $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ en fonction des vecteurs unitaires $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$.
- 2- Les vecteurs unitaires $\vec{e}_t$ et $\vec{e}_n$ en fonction des vecteurs unitaires $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$.
- 3- Calculer les expressions suivantes où t désigne le temps. **Conclure :**

$$\left. \frac{d\vec{e}_x}{dt} \right|_R \text{ et } \left. \frac{d\vec{e}_y}{dt} \right|_R ; \quad \left. \frac{d\vec{e}_r}{dt} \right|_R \text{ et } \left. \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \right|_R ; \quad \left. \frac{d\vec{e}_t}{dt} \right|_R \text{ et } \left. \frac{d\vec{e}_n}{dt} \right|_R$$

Correction de l'exercice N°7

1. $\vec{e}_r$: Vecteur unitaire radial

$\vec{e}_\theta$: Vecteur unitaire orthoradial

Avec : $\vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y$ $\vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y$

2. $\vec{e}_t$: Vecteur unitaire tangent à la trajectoire

$\vec{e}_n$: Vecteur unitaire porté à la normale et perpendiculaire à $\vec{e}_t$

Avec : $\vec{e}_t = \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y$ $\vec{e}_n = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y$

3. $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ sont des vecteurs d'une base constante de R

Donc : $\left. \frac{d\vec{e}_x}{dt} \right|_R = \left. \frac{d\vec{e}_y}{dt} \right|_R = 0$

$$\left. \frac{d\vec{e}_r}{dt} \right|_R = -\dot{\theta} \sin \theta \vec{e}_x + \dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_y = \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\left. \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \right|_R = -\dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_x - \dot{\theta} \sin \theta \vec{e}_y = -\dot{\theta} \vec{e}_r$$

De même : $\left. \frac{d\vec{e}_t}{dt} \right|_R = -\dot{\varphi} \sin \varphi \vec{e}_x + \dot{\varphi} \cos \varphi \vec{e}_y = \dot{\varphi} \vec{e}_n$

$$\left. \frac{d\vec{e}_n}{dt} \right|_R = -\dot{\varphi} \cos \varphi \vec{e}_x - \dot{\varphi} \sin \varphi \vec{e}_y = -\dot{\varphi} \vec{e}_t$$

Remarque : La dérivée par rapport au temps d'un vecteur de module constant est un vecteur qui lui est perpendiculaire.

Le module de la dérivée d'un vecteur est en général différent de la dérivée du module de ce vecteur.

Exemple : Le module de la dérivée est tel que : $\left\| \left. \frac{d\vec{e}_r}{dt} \right|_R \right\| = \dot{\theta} \|\vec{e}_\theta\| = \dot{\theta}$

La dérivée du module est telle que : $\left. \frac{d\|\vec{e}_r\|}{dt} \right|_R = 0$

Par conséquent : $\left\| \left. \frac{d\vec{e}_r}{dt} \right|_R \right\| \neq \left. \frac{d\|\vec{e}_r\|}{dt} \right|_R$

