

Épreuve de mécanique du point
Session normale : 05 Janvier 2016

Module : Mécanique du point
Filières : SMPC-SMIA

Durée : 2h00

Problème:

Un anneau M de masse m, assimilé à un point matériel, se déplace sans frottement sur une circonférence (C) de centre O_1 et de rayon a constant placée dans le plan vertical. La circonférence tourne autour de l'axe vertical (Oz) à la vitesse angulaire ω constante dans le repère galiléen $R(O, x, y, z)$ muni de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormée et directe (voir figure 1).

On désigne par $\theta(t)$ l'angle que fait le vecteur $\overrightarrow{O_1M}$ avec la verticale descendante passant par O_1 tel que $\theta(t) = (-\vec{k}, \overrightarrow{O_1M})$ (voir figure 1).

On associe à la circonférence (C) le référentiel relatif $R_1(O_1, x_1, y_1, z_1 = z)$ muni de la base $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k})$ orthonormée et directe dont l'axe (O_1x_1) est confondu avec (OO_1) alors que (O_1y_1) est perpendiculaire au plan $(x_1O_1z_1)$ et que les deux axes (O_1x_1) et (O_1y_1) appartiennent au plan (xOy) .

On note $\overrightarrow{O_1M} = a\vec{e}_r$ et $\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = -\vec{j}_1$ tels que $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ représentent les vecteurs unitaires de la base polaire (voir figures 1 et 2).

N.B : Toutes les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, -\vec{j}_1)$.

Partie A : Étude cinématique

1. Définir puis exprimer :

1 a) La vitesse relative : $\vec{V}_r(M) = \vec{V}(M / R_1)$.

1 b) L'accélération relative : $\vec{\gamma}_r(M) = \vec{\gamma}(M / R_1)$.

2. Définir puis exprimer:

1.5 a) La vitesse d'entraînement : $\vec{V}_e(M) = \vec{V}(M \in R_1 / R)$.

1.5 b) L'accélération d'entraînement : $\vec{\gamma}_e(M) = \vec{\gamma}(M \in R_1 / R)$.

1 c) L'accélération de Coriolis : $\vec{\gamma}_c(M)$.

Partie B : Étude dynamique

1 a) Faire le bilan de toutes les forces exercées sur M dans le repère relatif R_1 .

1 b) Vérifier que la force d'inertie d'entraînement s'exprime par:

$$\vec{F}_{ie} = m a \omega^2 (1 + \sin \theta) (\sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta).$$

1 c) Vérifier que la force d'inertie de Coriolis est donnée par : $\vec{F}_{ic} = -2 m a \dot{\theta} \omega \cos \theta \vec{j}_1$.

1 d) Écrire le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel relatif R_1 .

1.5 e) En projetant la relation obtenue en d) sur $\vec{e}_\theta$, Montrer que l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ peut s'écrire sous la forme : $a \ddot{\theta} = -g \sin \theta + a \omega^2 (1 + \sin \theta) \cos \theta$.

1.5 f) Déterminer les composantes de la réaction de (C) sur M dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, -\vec{j}_1)$.

1.5 g) Établir que l'équation donnant les positions d'équilibre dans le repère relatif R_1 est:

$$a \omega^2 (1 + \sin \theta) = g \tan \theta.$$

1.5 h) En examinant les directions et les sens des trois forces mises en jeu dans cet équilibre, déterminer quels sont les intervalles possibles pour les valeurs de l'angle θ correspondant

aux positions d'équilibre possibles parmi les 4 suivants : $\left[0, \frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ et $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

Partie C : théorème du moment cinétique

1 a) Définir le moment cinétique du point M en O_1 dans le référentiel relatif R_1 et donner son expression.

2 b) En appliquant le théorème du moment cinétique dans le référentiel relatif R_1 , retrouver l'équation du mouvement.

1 c) Peut-on obtenir par ce théorème toutes les composantes de la réaction de (C) sur M? Sinon, retrouver l'expression de la composante que l'on peut déterminer.

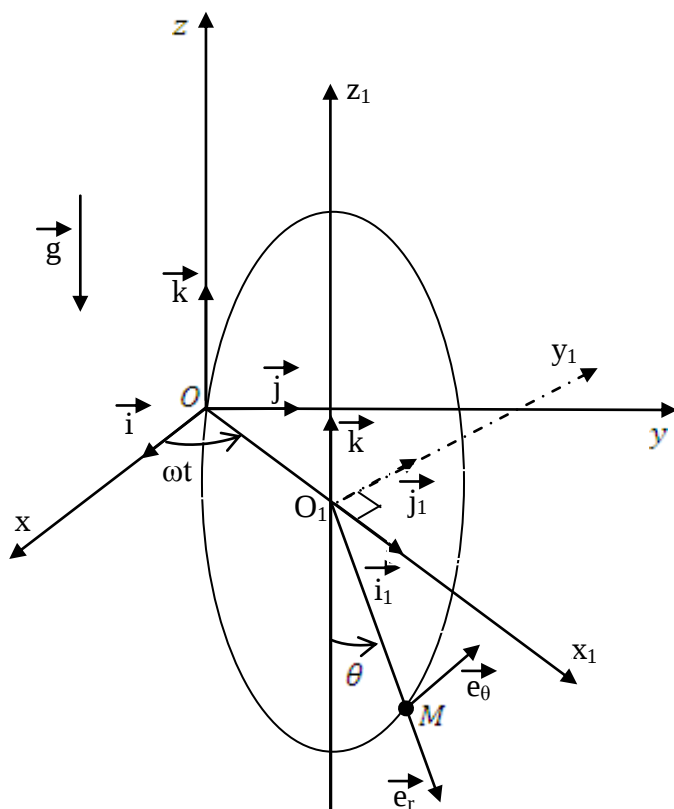


Figure 1 :
Cas d'une position quelconque de la
circonférence (C).

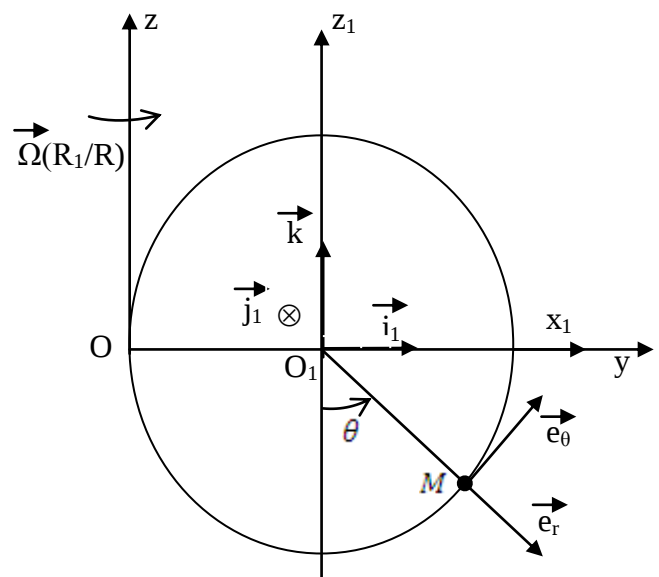


Figure 2 :
Cas où le plan de la circonférence (C)
est confondu avec le plan (yOz).