

Corrigé de l'Épreuve de mécanique du point
Session normale : 05 Janvier 2016

Problème:

Partie A : Étude cinématique

1. Expressions de la vitesse relative et de l'accélération relative: .

a) la vitesse relative: $\vec{V}_r(M) = \frac{d\vec{O_1M}}{dt} \Big|_{R_1}$ d'où $\vec{V}_r(M) = a\dot{\theta} \vec{e}_\theta$

0.5pt

0.5pt

b) l'accélération relative: $\vec{\gamma}_r(M) = \frac{d\vec{V}_r(M)}{dt} \Big|_{R_1}$ d'où $\vec{\gamma}_r(M) = a\ddot{\theta} \vec{e}_\theta - a\dot{\theta}^2 \vec{e}_r$

0.5pt

0.5pt

2. Expressions de la vitesse d'entraînement et de l'accélération d'entraînement et de Coriolis

a) la vitesse d'entraînement: $\vec{V}_e(M) = \frac{d\vec{OM}}{dt} \Big|_R$ tel que M est considéré fixe dans R_1

0.5pt

donc $\vec{V}_e(M) = \frac{d}{dt} \left[(a\vec{i}_1 + a\vec{e}_r) \right]_{R_1}^{\theta=cte} = a\omega \vec{j}_1 + a \frac{d\vec{e}_r}{dt} \Big|_R^{\theta=cte} = a\omega \vec{j}_1 + a\omega \sin \theta \vec{j}_1$

ainsi $\vec{V}_e(M) = a\omega(1 + \sin \theta) \vec{j}_1$

1pt

0.5pt

b) l'accélération d'entraînement: $\vec{\gamma}_e(M) = \frac{d}{dt} \left[\vec{V}_e(M) \right]_{R_1}^{\theta=cte} = a\omega(1 + \sin \theta) \frac{d\vec{j}_1}{dt} \Big|_R^{\theta=cte}$

donc $\vec{\gamma}_e(M) = -a\omega^2(1 + \sin \theta) \vec{i}_1$ implique $\vec{\gamma}_e(M) = -a\omega^2(1 + \sin \theta) (\cos \theta \vec{e}_\theta + \sin \theta \vec{e}_r)$

1pt

c) l'accélération de Coriolis: $\vec{\gamma}_c(M) = 2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r$ d'où $\vec{\gamma}_c(M) = 2a\omega\dot{\theta} \cos \theta \vec{j}_1$

0.5pt

0.5pt

Partie B : Étude dynamique

a) Les forces qui s'appliquent sur M dans le repère relatif R_1 sont :

• la force du poids: $\vec{P}$

0.25pt

• la réaction de la circonférence: $\vec{R}$

0.25pt

• la force d'inertie d'entraînement: $\vec{F}_{ie}$

0.25pt

• la force d'inertie de Coriolis: $\vec{F}_{ic}$

0.25pt

b) On sait que: $\vec{F}_{ie} = -m\vec{\gamma}_e(M)$ avec $\vec{\gamma}_e(M) = -a\omega^2(1 + \sin\theta)\vec{i}_1$

0.5pt

il vient donc $\vec{F}_{ie} = ma\omega^2(1 + \sin\theta)(\cos\theta\vec{e}_\theta + \sin\theta\vec{e}_r)$

0.5pt

0.5pt

c) par définition: $\vec{F}_{ic} = -m\vec{\gamma}_c(M)$ avec $\vec{\gamma}_c(M) = 2a\omega\dot{\theta}\cos\theta\vec{j}_1$ implique $\vec{F}_{ic} = -2ma\omega\dot{\theta}\cos\theta\vec{j}_1$

0.5pt

d) Application du PFD dans le référentiel relatif R_1 :

$$\vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} + \vec{R} + \vec{P} = m\vec{\gamma}_r(M)$$

1pt

e) En projetant la relation vectorielle du PFD obtenue en a) selon la direction de $\vec{e}_\theta$, on obtient:

0.5pt

$$\vec{F}_{ie} \cdot \vec{e}_\theta + \vec{F}_{ic} \cdot \vec{e}_\theta + \vec{R} \cdot \vec{e}_\theta + \vec{P} \cdot \vec{e}_\theta = m\vec{\gamma}_r(M) \cdot \vec{e}_\theta \text{ avec } \vec{R} \cdot \vec{e}_\theta = 0 \text{ et } \vec{i}_1 \cdot \vec{e}_\theta = \cos\theta \text{ et } \vec{k} \cdot \vec{e}_\theta = \sin\theta$$

$$\text{ce qui conduit à: } a\ddot{\theta} = -g\sin\theta + a\omega^2(1 + \sin\theta)\cos\theta$$

1pt

f) pour déterminer les composantes de $\vec{R}$, il faut projeter l'équation du PFD sur la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, -\vec{j}_1)$

• En l'absence de frottement, la réaction $\vec{R}$ est normale au déplacement implique $\vec{R} \cdot \vec{e}_\theta = R_\theta = 0$

$$\text{donc } \vec{R} = R_r\vec{e}_r + R_k(-\vec{j}_1)$$

0.5pt

• la projection de l'équation du PFD sur $\vec{e}_r$, donne: $R_r = -ma\dot{\theta}^2 - ma\omega^2(1 + \sin\theta)\sin\theta - mg\cos\theta$

• la projection de l'équation du PFD sur $(-\vec{j}_1)$, donne: $R_k = -2ma\omega\dot{\theta}\cos\theta$

0.5pt

0.5pt

g) il s'agit, bien entendu, de la condition d'équilibre dans $R_1 \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} = \vec{0}$

En projetant cette relation vectorielle selon la direction de $\vec{e}_\theta$, on obtient:

0.5pt

$$\vec{P} \cdot \vec{e}_\theta + \vec{R} \cdot \vec{e}_\theta + \vec{F}_{ie} \cdot \vec{e}_\theta + \vec{F}_{ic} \cdot \vec{e}_\theta = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -mg\vec{k} \cdot \vec{e}_\theta + 0 + ma\omega^2(1 + \sin\theta)(\cos\theta\vec{e}_\theta + \sin\theta\vec{e}_r) \cdot \vec{e}_\theta + -2ma\omega\dot{\theta}\cos\theta\vec{j}_1 \cdot \vec{e}_\theta = 0$$

$$\Leftrightarrow -mg\sin\theta + 0 + ma\omega^2(1 + \sin\theta)\cos\theta = 0$$

$$\Leftrightarrow a\omega^2(1 + \sin\theta)\cos\theta = g\sin\theta$$

or $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ ne peuvent jamais correspondre à des positions d'équilibre

$$\text{en divisant par } \cos\theta, \text{ on aura: } a\omega^2(1 + \sin\theta) = g\tan\theta$$

1pt

h) par un raisonnement graphique, on peut montrer que l'équation précédente admet deux solutions

appartiennent aux intervalles $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

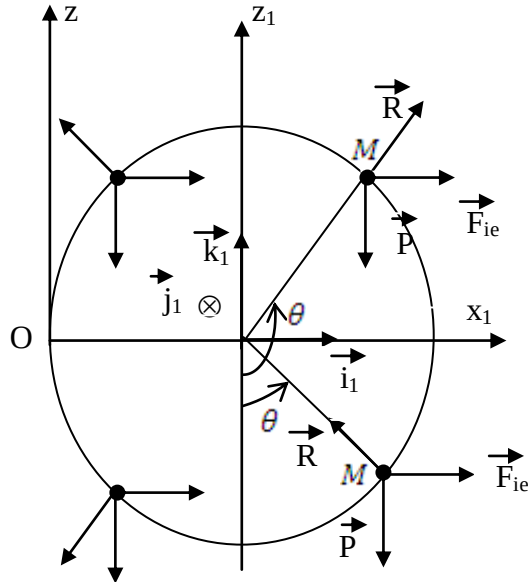
Soit le schéma suivant représentant les quatre possibilités pour les trois forces agissant sur M à l'équilibre. Notez bien que la force d'inertie de Coriolis est nulle à l'équilibre.

De ce schéma, on voit bien que la somme des forces ne peuvent s'annuler à l'équilibre que si :

$$\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ ou } \theta \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$$

0.5pt

0.5pt



0.5pt

Partie C : Théorème du moment cinétique

a) le moment cinétique de M en O_1 est défini par : $\vec{\sigma}_{O_1}(M) = \vec{O_1M} \wedge m\vec{V}(M/R_1) = \vec{O_1M} \wedge m\vec{V}_r$

donc $\vec{\sigma}_{O_1}(M) = -ma^2\dot{\theta}\vec{j}_1$

0.5pt

0.5pt

b) En appliquant le théorème du moment cinétique de M en O_1 dans R_1 , on aura :

$$\frac{d}{dt}[\vec{\sigma}_{O_1}(M)]_{R_1} = \vec{M}_{O_1}(\Sigma \vec{F}_{réelles}) + \vec{M}_{O_1}(\Sigma \vec{F}_{inerties})$$

0.5pt

donc $-ma^2\ddot{\theta}\vec{j}_1 = \vec{O_1M} \wedge (\vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} + \vec{R} + \vec{P})$ ce qui implique :

$$-ma^2\ddot{\theta}\vec{j}_1 = a\vec{e}_r \wedge (ma\omega^2(1+\sin\theta)\vec{i}_1 - 2ma\omega\dot{\theta}\cos\theta\vec{j}_1 + R_r\vec{e}_r - R_k\vec{j}_1 - mgk_1)$$

$$-ma^2\ddot{\theta}\vec{j}_1 = -ma^2\omega^2(1+\sin\theta)\cos\theta\vec{j}_1 - 2ma^2\omega\dot{\theta}\cos\theta\vec{e}_\theta - aR_k\vec{e}_\theta + mga\sin\theta\vec{j}_1$$

la projection sur $\vec{j}_1$ nous permet d'écrire : $-ma^2\ddot{\theta} = -ma^2\omega^2(1+\sin\theta)\cos\theta + mga\sin\theta$

0.5pt

ce qui conduit à :

$$a\ddot{\theta} = -g\sin\theta + a\omega^2(1+\sin\theta)\cos\theta$$

1.5pt

c) Non, ce théorème permet de déduire uniquement la composante R_k de $\vec{R}$ en faisant la projection sur $\vec{e}_\theta$:

$$R_k = -2ma\omega\dot{\theta}\cos\theta$$

0.5pt