

Corrigé de l'Épreuve de mécanique du point
Session normale : Janvier 2016

Problème:

Partie A : Étude cinématique

1. Expressions de la vitesse relative et de l'accélération relative: .

a) la vitesse relative: $\vec{V}_r(M) = \frac{d\vec{O_1M}}{dt} \Big|_{R_1}$ d'où $\vec{V}_r(M) = a\dot{\theta} \vec{e}_\theta$ 0.5pt

b) l'accélération relative: $\vec{\gamma}_r(M) = \frac{d\vec{V}_r(M)}{dt} \Big|_{R_1}$ d'où $\vec{\gamma}_r(M) = a\ddot{\theta} \vec{e}_\theta - a\dot{\theta}^2 \vec{e}_r$ 0.5pt

2. Expressions de la vitesse d'entraînement et de l'accélération d'entraînement et Coriolis

a) la vitesse d'entraînement: $\vec{V}_e(M) = \frac{d\vec{OM}}{dt} \Big|_R$ tel que M est considéré fixe dans R_1 0.5pt

donc $\vec{V}_e(M) = \frac{d}{dt} [(a\vec{i}_1 + a\vec{e}_r)]_{R_1}^{\theta=cte} = a\omega \vec{j}_1 + a \frac{d\vec{e}_r}{dt} \Big|_R^{\theta=cte} = a\omega \vec{j}_1 + a\omega \sin \theta \vec{j}_1$

ainsi $\vec{V}_e(M) = a\omega(1 + \sin \theta) \vec{j}_1$ 0.5pt

b) l'accélération d'entraînement: $\vec{\gamma}_e(M) = \frac{d}{dt} [\vec{V}_e(M)]_{R_1}^{\theta=cte} = a\omega(1 + \sin \theta) \frac{d\vec{j}_1}{dt}_R^{\theta=cte}$ 0.5pt

donc $\vec{\gamma}_e(M) = -a\omega^2(1 + \sin \theta) \vec{i}_1$ implique $\vec{\gamma}_e(M) = -a\omega^2(1 + \sin \theta)(\cos \theta \vec{e}_\theta + \sin \theta \vec{e}_r)$ 1pt

c) l'accélération de Coriolis: $\vec{\gamma}_c(M) = 2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r$ d'où $\vec{\gamma}_c(M) = 2a\omega\dot{\theta} \cos \theta \vec{j}_1$ 1pt

Partie B : Étude dynamique

a) Application du PFD dans le référentiel relatif R_1 :

$\vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} + \vec{R} + \vec{P} = m\vec{\gamma}_r(M)$ 1.5pt

b) On sait que: $\vec{F}_{ie} = -m\vec{\gamma}_e(M)$ avec $\vec{\gamma}_e(M) = -a\omega^2(1 + \sin \theta) \vec{i}_1$

il vient donc $\vec{F}_{ie} = ma\omega^2(1 + \sin \theta) \vec{i}_1$ 0.5pt

c) par définition: $\vec{F}_{ic} = -m\vec{\gamma}_c(M)$ avec $\vec{\gamma}_c(M) = 2a\omega\dot{\theta} \cos \theta \vec{j}_1$ implique $\vec{F}_{ic} = -2ma\omega\dot{\theta} \cos \theta \vec{j}_1$ 0.5pt

d) En projetant la relation vectorielle du PFD obtenue en a) selon la direction de $\vec{e}_\theta$, on obtient :

$\vec{F}_{ie} \cdot \vec{e}_\theta + \vec{F}_{ic} \cdot \vec{e}_\theta + \vec{R} \cdot \vec{e}_\theta + \vec{P} \cdot \vec{e}_\theta = m\vec{\gamma}_r(M) \cdot \vec{e}_\theta$ avec $\vec{R} \cdot \vec{e}_\theta = 0$ et $\vec{i}_1 \cdot \vec{e}_\theta = \cos \theta$ et $\vec{j}_1 \cdot \vec{e}_\theta = \sin \theta$

ce qui conduit à :

$$a\ddot{\theta} = -g \sin \theta + a\omega^2(1 + \sin \theta)\cos \theta$$

1.5pt

e) pour déterminer les composantes de $\vec{R}$, il faut projeter l'équation du PFD sur la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, -\vec{j}_1)$

- En l'absence de frottement, la réaction $\vec{R}$ est normale au déplacement implique $\vec{R} \cdot \vec{e}_\theta = R_\theta = 0$

donc $\vec{R} = R_r \vec{e}_r + R_k (-\vec{j}_1)$

0.5pt

- la projection de l'équation du PFD sur $\vec{e}_r$, donne : $R_r = -ma\dot{\theta}^2 - ma\omega^2(1 + \sin \theta)\sin \theta - mg \cos \theta$

- la projection de l'équation du PFD sur $(-\vec{j}_1)$, donne : $R_k = -2ma\omega\dot{\theta} \cos \theta$

0.5pt

0.5pt

Partie C : Théorème du moment cinétique

- a) le moment cinétique du M en O_1 est défini par : $\vec{\sigma}_{O_1}(M) = \overrightarrow{O_1M} \wedge m\vec{V}(M/R_1) = \overrightarrow{O_1M} \wedge m\vec{V}_r$

donc $\vec{\sigma}_{O_1}(M) = -ma^2\dot{\theta} \vec{j}_1$

0.5pt

0.5pt

- b) En appliquant le théorème du moment cinétique de M en O_1 dans R_1 , on aura :

$$\frac{d}{dt} [\vec{\sigma}_{O_1}(M)]_{R_1} = \vec{M}_{O_1}(\Sigma \vec{F}_{réelles}) + \vec{M}_{O_1}(\Sigma \vec{F}_{inerties})$$

0.5pt

donc $-ma^2\ddot{\theta} \vec{j}_1 = \overrightarrow{O_1M} \wedge (\vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} + \vec{R} + \vec{P})$ ce qui implique :

$$-ma^2\ddot{\theta} \vec{j}_1 = a\vec{e}_r \wedge (ma\omega^2(1 + \sin \theta)\vec{i}_1 - 2ma\omega\dot{\theta} \cos \theta \vec{j}_1 + R_r \vec{e}_r - R_k \vec{j}_1 - mg\vec{k}_1)$$

$$-ma^2\ddot{\theta} \vec{j}_1 = -ma^2\omega^2(1 + \sin \theta)\cos \theta \vec{j}_1 - 2ma^2\omega\dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_\theta - aR_k \vec{e}_\theta + mga \sin \theta \vec{j}_1$$

la projection sur $\vec{j}_1$ nous permet d'écrire : $-ma^2\ddot{\theta} = -ma^2\omega^2(1 + \sin \theta)\cos \theta + mga \sin \theta$

ce qui conduit à :

$$a\ddot{\theta} = -g \sin \theta + a\omega^2(1 + \sin \theta)\cos \theta$$

0.5pt

- c) ce théorème permet de déduire uniquement la composante R_k de $\vec{R}$ en faisant la projection sur $\vec{e}_\theta$:

$$R_k = -2ma\omega\dot{\theta} \cos \theta$$

0.5pt

Partie D : Étude Énergétique

1. a) la force d'inertie d'entraînement dérive d'une énergie potentielle $E_{p1}(\theta)$ si $\vec{F}_{ie} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_{p1}$

il vient donc $\vec{F}_{ie} \cdot d\overrightarrow{O_1M} = -dE_{p1}$ ce qui donne $ma\omega^2(1 + \sin \theta)\vec{i}_1 \cdot a d\theta \vec{e}_\theta = -dE_{p1}$

$$\Rightarrow dE_{p1} = ma^2\omega^2(1 + \sin \theta)d\theta$$

$$\Rightarrow \text{En intégrant par rapport à } \theta, \text{ on aura : } E_{p1}(\theta) = -\frac{1}{2}ma^2\omega^2(1 + \sin \theta)^2 + C_1$$

⇒ en prenant $E_{p1}(0) = 0$, on a : $C_1 = \frac{1}{2}ma^2\omega^2$

par conséquent $E_{p1}(\theta) = \frac{1}{2}ma^2\omega^2(1 - (1 + \sin\theta)^2)$

ce qui conduit à : $E_{p1}(\theta) = -\frac{1}{2}ma^2\omega^2 \sin(\theta)(2 + \sin\theta)$ 1pt

b) la force du poids dérive d'une énergie potentielle $E_{p2}(\theta)$ si $\vec{P} = -\overrightarrow{\text{grad}}E_{p2}$

il vient donc $\vec{P} \cdot d\vec{O_1M} = -dE_{p2}$ ce qui donne $-mg\vec{k}_1 \cdot d\theta \vec{e}_\theta = -dE_{p2}$

donc $-mg a d\theta \sin\theta = -dE_{p2}$

⇒ En intégrant par rapport à θ , on aura : $E_{p2}(\theta) = -mga \cos\theta + C_2$

en prenant $E_{p2}(0) = 0$, on a : $C_2 = mga \Rightarrow E_{p2}(\theta) = mga(1 - \cos\theta)$ 1pt

c) Du fait que la force d'inertie de Coriolis et la réaction $\vec{R}$ sont perpendiculaires à la vitesse relative

donc leur travail est nul.

ainsi l'énergie potentielle dont elles dérivent est constante que l'on prendra nulle

par conséquent $E_p(\theta) = E_{p1}(\theta) + E_{p2}(\theta) \Rightarrow E_p(\theta) = \frac{1}{2}ma^2\omega^2[1 - (1 + \sin\theta)^2] + mga(1 - \cos\theta)$

d) Sachant que toutes les forces s'exerçant sur M sont conservatives,

1pt

donc d'après le théorème de E_m , on a :

$$E_m = \text{cte} \quad \text{or} \quad E_m = E_c + E_p \quad \Rightarrow \quad E_m = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ma^2\omega^2[1 - (1 + \sin\theta)^2] + mga(1 - \cos\theta)$$

en dérivant par rapport au temps, on aura : $\frac{dE_m}{dt} = ma^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + ma^2\omega^2\dot{\theta}[-(1 + \sin\theta)\cos\theta] + mga\dot{\theta}\sin\theta$

$$E_m = \text{cte} \quad \Rightarrow \quad \frac{dE_m}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad (ma^2\ddot{\theta} - ma^2\omega^2(1 + \sin\theta)\cos\theta + mga\sin\theta)\dot{\theta} = 0$$

$$\text{or} \quad \dot{\theta} \text{ ne peut être jamais constamment nul} \quad \Rightarrow \quad a\ddot{\theta} = a\omega^2(1 + \sin\theta)\cos\theta - g\sin\theta \quad 1pt$$

on retrouve donc la même équation obtenue à partir du PFD.

2. a) il s'agit, bien entendu, de la condition d'équilibre pour ce système conservatif $\Leftrightarrow \frac{dE_p}{d\theta}(\theta_{eq}) = 0$

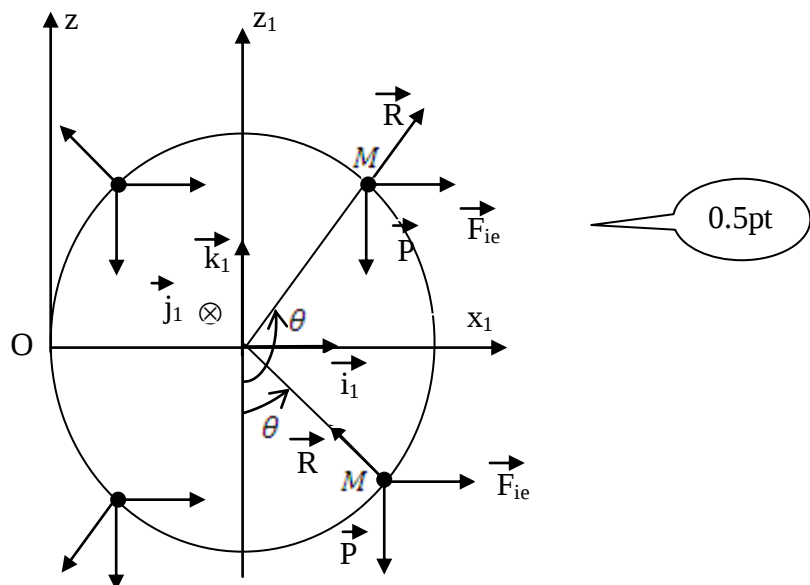
$$\text{or} \quad E_p(\theta) = \frac{1}{2}ma^2\omega^2[1 - (1 + \sin\theta)^2] + mga(1 - \cos\theta) \Rightarrow -ma^2\omega^2(1 + \sin\theta)\cos\theta + mga\sin\theta = 0$$

donc $a\omega^2(1 + \sin \theta)\cos \theta = g \sin \theta$ or $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ ne peuvent jamais correspondre à des positions d'équilibre

en dérivant par $\cos \theta$, on aura : $a\omega^2(1 + \sin \theta) = g \tan \theta$ 0.5pt

b) par un raisonnement graphique, on peut montrer que l'équation précédente admet deux solutions appartenant aux intervalles $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Soit le schéma suivant représentant les quatre possibilités pour les trois forces agissantes sur M à l'équilibre. Notez bien que la force d'inertie de Coriolis est nulle à l'équilibre.



De ce schéma, on voit bien que la somme des forces ne peuvent s'annuler à l'équilibre que si :

$$\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ ou } \theta \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$$