

Corrigé de l'Épreuve de mécanique du point
Session normale : 02 Janvier 2017

Problème:

Partie A : Étude cinématique

1. Expressions de la vitesse relative et de l'accélération relative :

- a) la vitesse relative : $\vec{V}_r(M) = \frac{d\vec{OM}}{dt} \Big|_{R_1}$ d'où $\vec{V}_r(M) = \dot{r} \vec{e}_r = \dot{r} (\sin \theta \vec{e}_\rho + \cos \theta \vec{k})$ 0.5pt
- b) l'accélération relative : $\vec{\gamma}_r(M) = \frac{d\vec{V}_r(M)}{dt} \Big|_{R_1}$ d'où $\vec{\gamma}_r(M) = \ddot{r} (\sin \theta \vec{e}_\rho + \cos \theta \vec{k})$ 0.5pt

2. Expressions de la vitesse d'entraînement et de l'accélération d'entraînement et de Coriolis

- a) la vitesse d'entraînement : $\vec{V}_e(M) = \frac{d\vec{OM}}{dt} \Big|_R$ tel que M est considéré fixe dans R_1 0.5pt
- donc $\vec{V}_e(M) = \frac{d}{dt} [(r\vec{e}_r)]_{R}^{r=cte} = r\omega \sin \theta \vec{e}_\phi$
- ainsi $\vec{V}_e(M) = r\omega \sin \theta \vec{e}_\phi$ 0.5pt
- b) l'accélération d'entraînement : $\vec{\gamma}_e(M) = \frac{d}{dt} [\vec{V}_e(M)]_R^{r=cte}$ 0.5pt
- donc $\vec{\gamma}_e(M) = -r\omega^2 \sin \theta \vec{e}_\rho$ 1pt
- c) l'accélération de Coriolis : $\vec{\gamma}_c(M) = 2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r$ d'où $\vec{\gamma}_c(M) = 2\omega \dot{r} \sin \theta \vec{e}_\phi$ 1pt
- 0.5pt

Partie B : Étude dynamique

a) Les forces qui s'appliquent sur M dans le repère relatif R_1 sont :

- la force du poids : $\vec{P}$ 0.25pt
- la réaction de la tige : $\vec{R}$ 0.25pt
- la force d'inertie d'entraînement : $\vec{F}_{ie}$ 0.25pt
- la force d'inertie de Coriolis : $\vec{F}_{ic}$ 0.25pt

0.5pt

b) En l'absence de frottement, la réaction $\vec{R}$ est normale au déplacement implique $\vec{R} \cdot \vec{e}_r = R_r = 0$

et vu que $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ est une base orthonormée directe alors : $\vec{R} = R_\theta \vec{e}_\theta + R_\varphi \vec{e}_\varphi$

0.5pt

c) Application du PFD dans le référentiel relatif R_1 :

$$\vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} + \vec{R} + \vec{P} = m \vec{\gamma}_r(M)$$

0.5pt

En projetant cette relation vectorielle du PFD selon la direction de $\vec{e}_r$, on obtient :

0.5pt

$$\vec{F}_{ie} \cdot \vec{e}_r + \vec{F}_{ic} \cdot \vec{e}_r + \vec{R} \cdot \vec{e}_r + \vec{P} \cdot \vec{e}_r = m \vec{\gamma}_r(M) \cdot \vec{e}_r \quad \text{avec } \vec{R} \cdot \vec{e}_r = 0$$

$$\text{ce qui conduit à : } \ddot{r} - (\omega \sin \theta)^2 r = -g \cos \theta$$

1.5pt

d) la solution de l'équation précédente est :

$$r(t) = A e^{-(\omega \sin \theta)t} + B e^{(\omega \sin \theta)t} + \frac{g \cos \theta}{\omega^2 \sin^2 \theta}$$

0.5pt

$$\text{les conditions initiales conduisent à : } \begin{cases} r(t=0) = r_0 = A + B + \frac{g \cos \theta}{\omega^2 \sin^2 \theta} \\ \dot{r}(t=0) = 0 = -A\omega \sin \theta + B\omega \sin \theta \end{cases}$$

1pt

$$\text{il vient donc } A = B = \frac{1}{2} \left[r_0 - \frac{g \cos \theta}{\omega^2 \sin^2 \theta} \right] \quad \text{d'où} \quad r(t) = \frac{1}{2} \left[r_0 - \frac{g \cos \theta}{\omega^2 \sin^2 \theta} \right] \left(e^{-(\omega \sin \theta)t} + e^{(\omega \sin \theta)t} \right) + \frac{g \cos \theta}{\omega^2 \sin^2 \theta}$$

e)

• la projection de l'équation du PFD sur $\vec{e}_\varphi$, donne : $R_\varphi = 2m\omega \dot{r} \sin \theta$

0.5pt

• la projection de l'équation du PFD sur $\vec{e}_\theta$, donne : $R_\theta = -m \sin \theta (g + r\omega^2 \cos \theta)$

0.5pt

f) à l'équilibre on a : $\ddot{r} = 0 \Rightarrow$ d'après l'équation du PFD, on a :

$$r_{eq} = \frac{g \cos \theta}{\omega^2 \sin^2 \theta}$$

1pt

une position d'équilibre de l'anneau sur la tige ne peut exister que si : $r_{eq} < d$ soit pour $\frac{g \cos \theta}{\omega^2 \sin^2 \theta} < d$

g)

$$\Rightarrow \omega^2 > \frac{g \cos \theta}{d \sin^2 \theta} \Rightarrow \omega > \sqrt{\frac{g \cos \theta}{d \sin^2 \theta}} = \omega_0$$

1pt

0.5pt

h) Lorsqu'on écarte légèrement l'anneau de sa position d'équilibre :

0.5pt

• si $r > r_{eq}$ F_{ie} augmente alors que P ne varie pas, l'anneau continu à monter et s'éloigne de sa position d'équilibre.

- si $r < r_{eq}$ F_{ie} diminue alors que P ne varie pas, l'anneau continu à descendre et s'éloigne de sa position d'équilibre.

0.5pt

On constate que la position d'équilibre est instable

0.5pt

Partie C : Théorème du moment cinétique

a) le moment cinétique du M en O est défini par

$$\vec{\sigma}_O(M) = \vec{OM} \wedge m\vec{V}(M / R_1) = \vec{OM} \wedge m\vec{V}_r$$

0.5pt

donc $\vec{\sigma}_O(M) = \vec{0}$

1pt

b) En appliquant le théorème du moment cinétique de M en O dans R_1 , on aura :

$$\frac{d}{dt} [\vec{\sigma}_O(M)]_{R_1} = \vec{M}_O \left(\sum \vec{F}_{réelles} \right) + \vec{M}_O \left(\sum \vec{F}_{inerties} \right) = \vec{0}$$

donc $\vec{OM} \wedge (\vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} + \vec{R} + \vec{P}) = \vec{0}$ ce qui implique :

$$r\vec{e}_r \wedge -mg\vec{k} + mr^2\omega^2 \sin\theta (\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\rho) - 2mr\dot{\omega} \sin\theta (\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\varphi) + r\vec{e}_r \wedge (R_\theta \vec{e}_\theta + R_\varphi \vec{e}_\varphi) = \vec{0}$$

$$R_\theta = -m \sin\theta (g + r\omega^2 \cos\theta)$$

1pt

il vient donc :

$$R_\varphi = 2m\omega\dot{r} \sin\theta$$

1pt