

Corrigé de l'Épreuve de mécanique du point
Session normale : 02 Janvier 2018

Pendule simple:

1) les forces qui s'appliquent sur le point matériel M sont :

• la force du poids : $\vec{P} = mg \vec{i} = mg(\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta)$ 1pt

• la tension du fil : $\vec{T} = -T \vec{e}_r$ 1pt

2) l'accélération du point M s'exprime par: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ avec $\vec{v} = l\dot{\theta} \vec{e}_\theta$, donc $\vec{a} = -l\dot{\theta}^2 \vec{e}_r + l\ddot{\theta} \vec{e}_\theta$. 0.5pt

3) a. En appliquant le principe fondamental de la dynamique: $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$

Il vient donc : $mg(\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta) - T \vec{e}_r = m(-l\dot{\theta}^2 \vec{e}_r + l\ddot{\theta} \vec{e}_\theta)$ En projetant cette relation vectorielle

selon la direction de $\vec{e}_\theta$, on obtient : $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$ 1pt

b. la période des petites oscillations du pendule : dans ce cas, on a : $\sin \theta \approx \theta$. 1pt

L'équation du mvt devient : $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$ dont la solution est une fonction sinusoïdale de période $2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$. 2pt

4) On a : $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$, En multipliant par $2\dot{\theta}$, on aura : $2\dot{\theta}\ddot{\theta} + 2\dot{\theta}\frac{g}{l} \sin \theta = 0$

Ce qui conduit à $\frac{d\dot{\theta}^2}{dt} + \frac{d}{dt}(-2\frac{g}{l} \cos \theta) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(\dot{\theta}^2 - 2\frac{g}{l} \cos \theta) = 0$

En intégrant par rapport au temps, il vient donc : $\Rightarrow \dot{\theta}^2 - 2\frac{g}{l} \cos \theta = cte$

On considère qu'à l'instant $t=0$ on a $\theta(0) = \theta_m$ et $\dot{\theta}(0) = 0$, donc $\dot{\theta}^2(t=0) - 2\frac{g}{l} \cos \theta(t=0) = cte$

$0 - 2\frac{g}{l} \cos \theta_m = cte \Rightarrow cte = -2\frac{g}{l} \cos \theta_m \Rightarrow \dot{\theta}^2 = 2\frac{g}{l}(\cos \theta - \cos \theta_m)$. 2pt

5) En appliquant le principe fondamental de la dynamique: $mg(\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta) - T \vec{e}_r = m(-l\dot{\theta}^2 \vec{e}_r + l\ddot{\theta} \vec{e}_\theta)$

En projetant cette relation vectorielle selon la direction de $\vec{e}_r$, on obtient :

$mg \cos \theta - T = -ml\dot{\theta}^2 \Rightarrow T = mg \cos \theta + ml\dot{\theta}^2$ et sachant que $\dot{\theta}^2 = 2\frac{g}{l}(\cos \theta - \cos \theta_m)$ donc

$$T = mg(3 \cos \theta - 2 \cos \theta_m)$$

1pt

1pt

6)

a. Retrouvons l'équation du mouvement vérifiée par l'angle θ en utilisant la conservation de l'énergie mécanique : on a $E_C = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow E_C = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$ 0.5pt

On sait que : $E_p = -mgx + cte = -mgl \cos \theta + cte$

En prenant comme référence pour l'énergie potentielle de pesanteur la position $\theta = 0$: $E_p(\theta = 0) = 0$.

Donc $E_p(\theta) = -mgl \cos \theta + cte = 0 \Rightarrow cte = mgl$

alors $E_p = mgl(1 - \cos \theta)$ 0.5pt

par conséquent l'énergie mécanique du pendule est donnée par : $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos \theta)$

le mouvement est sans frottement donc la force du poids est la seule force qui travaille.

Donc le système est conservatif ce qui conduit à $E_m = cte$

On a $E_m = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos \theta) \Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow ml^2 \ddot{\theta} + mgl \sin \theta \Rightarrow ml^2 \dot{\theta}(\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta) = 0$

or $\dot{\theta}$ ne peut être jamais nulle $\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$ 1pt

b. Retrouvons l'équation du mouvement vérifiée par l'angle θ en utilisant le théorème du moment cinétique :

En appliquant le théorème du moment cinétique de M en O, on aura :

0.5pt

$$\frac{d}{dt} [\vec{\sigma}_O M]_R = \vec{M}_O \sum \vec{F}_{réelles} \quad \text{où} \quad \vec{\sigma}_O M = l \vec{e}_r \wedge ml \dot{\theta} \vec{e}_\theta = ml^2 \dot{\theta} \vec{k}$$

0.5pt

$$\text{donc} \quad ml^2 \ddot{\theta} \vec{k} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} + \vec{P}$$

$$\text{ce qui implique : } ml^2 \ddot{\theta} \vec{k} = l \vec{e}_r \wedge [mg(\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta) - T \vec{e}_r] \Rightarrow ml^2 \ddot{\theta} \vec{k} = -mgl \sin \theta \vec{k}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad 1pt$$

7)

a. Les positions d'équilibre du système sont données par la résolution de l'équation :

$$\frac{dE_p}{d\theta}(\theta) = 0 \Rightarrow mgl \sin \theta = 0 \Rightarrow \sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0[2\pi] \text{ où } \theta = \pi[2\pi] \quad 1pt$$

1pt

b. La stabilité des positions d'équilibre : on a : $\frac{d^2 E_p}{d\theta^2}(\theta) = mgl \cos \theta \Rightarrow \frac{d^2 E_p}{d\theta^2}(\theta = 0) = mgl > 0$ donc $\theta = 0$

est une position d'équilibre stable 1pt

Et comme $\frac{d^2 E_p}{d\theta^2}(\theta = \pi) = -mgl < 0$ donc $\theta = \pi$ est une position d'équilibre instable. 1pt