

Chapitre 4

Application - Forces Centrales

I- Force Centrale

1- Définition

Un point matériel est soumis à une **force centrale**, si cette force est toujours dirigée vers un point fixe O du référentiel considéré.

En choisissant O comme centre du référentiel, la force s'écrit donc: $\vec{F} = F \vec{e}_r$

$\vec{e}_r$ étant le vecteur unitaire radial des coordonnées polaire (note $\vec{e}_\rho$ dans le chapitre 1).

Dans ce cas aussi, la force centrale $\vec{F}$ est parallèle au vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

Exemples :

♠ Interaction gravitationnelle : $\vec{F} = - \frac{Gm_1m_2}{r^2} \vec{e}_r$

♠ Interaction électrostatique (Force de Coulomb) : $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1q_2}{r^2} \vec{e}_r$

♠ Force de rappel d'un ressort : $\vec{F} = - Kx\vec{i}$

2- Conservation du Moment Cinétique

Le moment cinétique d'une force centrale par rapport au point vers lequel elle est

dirigée est conservé: $\frac{d\vec{\sigma}_O(M/R)}{dt} = \vec{0}$

Preuve :

$$\frac{d\vec{\sigma}_O(M/R)}{dt} = \frac{d(\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}(M/R))}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge m\vec{V}(M/R) + \overrightarrow{OM} \wedge m \frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}$$

$$\frac{d\vec{\sigma}_O(M/R)}{dt} = \vec{V}(M/R) \wedge m\vec{V}(M/R) + \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{\gamma}(M/R) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{\gamma}(M/R)$$

En utilisant le P.F.D. de la dynamique : $m\vec{\gamma}(M/R) = \vec{F}$, et sachant que $\vec{F}$, est une force centrale ($\vec{F} // \overrightarrow{OM}$) on en déduit que $\frac{d\vec{\sigma}_O(M/R)}{dt} = \vec{0}$.

3- Mouvement Plan

Une conséquence immédiate de la conservation du moment cinétique est que le mouvement d'un point matériel soumis à une force centrale est plan.

En effet, le moment cinétique étant perpendiculaire au vecteur position et au vecteur vitesse, ces deux vecteurs appartiennent donc à un plan fixe (puisque perpendiculaire à $\vec{\sigma}_O(M/R) = \text{cste}$) qui est le plan du mouvement. De ce fait, en général, les coordonnées polaires sont plus adéquates pour la description d'un mouvement à force centrale.

4- Loi des aires

Constante des aires :

Une deuxième conséquence de la conservation du moment cinétique dans le cas des forces centrales est que la quantité $r^2\dot{\phi}$ est constante : $r^2\dot{\phi} = C$

C : est appelée la constante des aires.

En effet, en utilisant les expressions en coordonnées polaires du vecteur position, $\vec{OM} = r\vec{e}_r$, et du vecteur vitesse, $\vec{V}(M/R) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$, on obtient l'expression du moment cinétique :

$$\vec{\sigma}_O(M/R) = \vec{OM} \wedge m\vec{V}(M/R) = r\vec{e}_r \wedge m(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi) = mr^2\dot{\varphi}\vec{k}$$

Le moment cinétique étant conservé on en déduit que $r^2\dot{\varphi}$ est une constante.

Loi des aires (2^{ème} loi de Kepler): La loi des aires stipule que la vitesse aréolaire est constante pour un mouvement à force centrale. Cela peut être aussi exprimé sous la forme suivante : « *Le vecteur position balaie des surfaces égales en des intervalles de temps égaux* ».

Preuve :

La vitesse aréolaire est définie comme étant le taux de variation, dans le temps, de la surface balayé par le vecteur position :

$$V = \frac{ds}{dt}$$

ds étant l'élément de surface balayé par le vecteur position en un intervalle de temps **dt** (*à ne pas confondre avec l'abscisse curviligne ds*). En utilisant le schéma à côté on peut écrire l'élément de surface

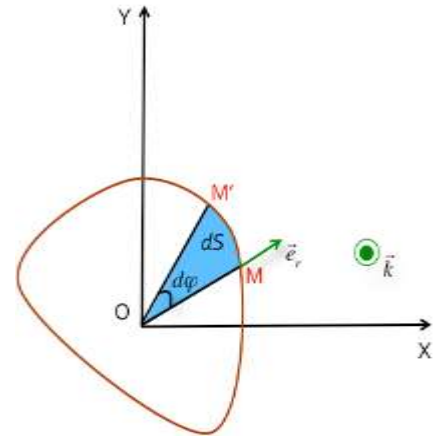
en fonction de l'élément d'angle :

$$ds = \frac{r(rd\varphi)}{2} = \frac{1}{2}r^2d\varphi$$

La vitesse aréolaire s'écrit alors :

$$V = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = \frac{1}{2}C$$

C étant la constante des aires, cela démontre que la vitesse aréolaire est une quantité constante dans le cas d'un mouvement à force centrale.



5- Formules de Binet

5. 1- Première formule de Binet (Energie cinétique):

L'énergie cinétique d'un point matériel soumis à une force centrale est donnée par

l'expression suivante :

$$E_C = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}mC^2 \left[(u')^2 + u^2 \right]$$

Où on a utilisé les notations suivantes : $u = \frac{1}{r}$ et $u' = \frac{du}{d\varphi}$

Preuve :

En coordonnées polaires le vecteur vitesse s'écrit :

$$\vec{V}(M/R) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

et son module défini par : $V = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}$

En utilisant $u = \frac{1}{r}$ on a $\frac{dr}{du} = -\frac{1}{u^2}$ et on écrit $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du} \frac{du}{dt} = \frac{dr}{du} \frac{du}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{u^2} u' \dot{\varphi}$

Ou encore $\dot{r} = -Cu'$

Où on a utilisé la définition de la constante des aires : $C = r^2\dot{\varphi} = \frac{1}{u^2}\dot{\varphi}$

Ce qui donne donc $\dot{r}^2 = C^2(u')^2$

L'autre terme dans le module de la vitesse s'écrit : $r^2\dot{\phi}^2 = \frac{C^2}{r^2} = u^2C^2$

Le carré du module de la vitesse s'écrit donc $V^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 = C^2(u')^2 + u^2C^2 = C^2[(u')^2 + u^2]$

Ce qui donne la première formule de Binet.

5. 2- Deuxième formule de Binet (La force):

La force centrale exercée sur un point matériel peut être écrite sous la forme :

$$\vec{F} = m\vec{\gamma}(M/R) = -mC^2u^2[u'' + u]\vec{e}_r$$

Avec $u'' = \frac{d^2u}{d\phi^2}$

Preuve :

En coordonnées polaires le vecteur accélération s'écrit :

$$\vec{\gamma}(M/R) = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\phi} - 2\dot{r}\dot{\phi})\vec{e}_\phi = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\vec{e}_r$$

La composante suivant $\vec{e}_\phi$ est nulle, puisque $r\ddot{\phi} - 2\dot{r}\dot{\phi} = \frac{1}{r} \frac{dC}{dt} = 0$, Où $C = r^2\dot{\phi}$ est la constante des aires. On peut écrire la composante radiale de l'accélération en fonction de C, u et u'' :

On avait déjà établi que $\dot{r} = -Cu'$ ce qui donne pour $\ddot{r}$:

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = -C \frac{du'}{dt} = -C \frac{du'}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = -Cu''\dot{\phi} = -C^2u''u^2$$

Dans la dernière égalité on a utilisé $\dot{\phi} = Cu^2$.

On a aussi $r\dot{\phi}^2 = \frac{C}{r^3} = u^3C^2$

Le vecteur accélération s'écrit alors :

$$\vec{\gamma}(M/R) = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\vec{e}_r = (-C^2u''u^2 - u^3C^2)\vec{e}_r = -C^2u^2(u'' + u)\vec{e}_r$$

Qui permet d'établir la deuxième formule de Binet en utilisant le P.F.D.

II- Champ Newtonien

1- Définition

Une force est dite Newtonienne si c'est une force centrale qui varie selon la loi $1/r^2$:

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\vec{e}_r$$

K étant une constante. La force est attractive si k est positive; elle est répulsive si k est négative.

Exemples :

♠ Interaction gravitationnelle : $k = Gm_1m_2$

♠ Interaction électrostatique (Force de Coulomb) : $k = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}q_1q_2$

2- Equation de la Trajectoire

L'équation différentielle du mouvement d'un point matériel soumis à une force centrale s'écrit : $\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{k}{mC^2}$

Cette équation peut être établie en utilisant les formules de Binet avec le principe fondamental de la dynamique ou encore en utilisant la conservation de l'énergie mécanique.

Preuve 1 (en utilisant le PFD)

Une force Newtonienne s'écrit sous la forme : $\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\vec{e}_r = -ku^2\vec{e}_r$ Où $u = \frac{1}{r}$.

D'un autre côté, en utilisant la deuxième formule de Binet on écrit la force sous forme :

$$\vec{F} = -mC^2 u^2 (u'' + u) \vec{e}_r$$

En égalisant les deux expressions on obtient

$$-ku^2\vec{e}_r = -mC^2 u^2 (u'' + u) \vec{e}_r \Rightarrow k = mC^2 (u'' + u)$$

Ou encore $u'' + u = \frac{k}{mC^2}$

Preuve 2 (en utilisant la conservation de E_m):

Une force Newtonienne étant une force conservative, elle dérive d'une énergie potentielle qui s'écrit sous la forme (utiliser $\vec{F} = -\vec{\text{grad}} E_p$). $E_p = -\frac{k}{r} + \text{Cste}$

En considérant que l'énergie potentielle s'annule à l'infini on obtient : $E_p = -\frac{k}{r} = -ku$

D'autre part l'énergie cinétique s'écrit en utilisant la première formule de Binet :

$$E_c = \frac{1}{2} mC^2 [(u')^2 + u^2]$$

L'énergie mécanique s'écrit alors : $E_m = E_p + E_c = -ku + \frac{1}{2} mC^2 [(u')^2 + u^2]$

$\vec{F}$ étant conservative, l'énergie mécanique doit être conservée :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \Leftrightarrow -k \frac{du}{dt} + \frac{1}{2} mC^2 \left[\frac{d(u')^2}{dt} + \frac{du^2}{dt} \right] = 0$$

ou encore $-k \frac{du}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2} mC^2 \left[2u' \frac{du'}{dt} + 2u \frac{du}{dt} \right] = -k \frac{du}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2} mC^2 \left[2u' \frac{du'}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} + 2u \frac{du}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} \right] = 0$

en simplifiant par $\frac{du}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = u' \frac{d\varphi}{dt}$ qui ne peut être nul : $-k + \frac{1}{2} mC^2 \left[\frac{du'}{d\varphi} + u \right] = 0$

qui permet d'écrire (sachant que $\frac{du'}{d\varphi} = u''$: $u'' + u = \frac{k}{mC^2}$

La solution de l'équation différentielle (de second ordre avec second membre) du mouvement s'écrit sous la forme : $u(\varphi) = u_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{k}{mC^2}$

En utilisant les notations suivantes : $\frac{p}{\varepsilon} = \frac{mC^2}{k}$, $e = pu_0$

Avec ε dénotant le signe de k c.a.d. $\begin{cases} \varepsilon = 1 & \text{si } k > 0 \\ \varepsilon = -1 & \text{si } k < 0 \end{cases}$, On obtient l'expression de

l'équation de la trajectoire en termes des coordonnées polaires (r, φ) :

$$r(\varphi) = \frac{p}{\varepsilon + e \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

C'est l'équation d'une conique de paramètre p et d'excentricité e , où O est l'un des foyers.

Dans toute la suite, on va prendre $\varphi_0 = 0$ et $\varepsilon = 1$ (force attractive), donnant comme

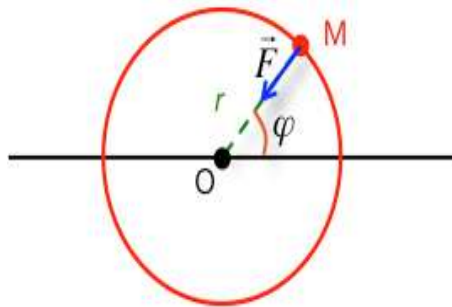
équation de la trajectoire : $r(\varphi) = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$

3- Classification d'une Trajectoire selon son excentricité

Suivant la valeur de l'excentricité e , on peut obtenir plusieurs types de trajectoires.

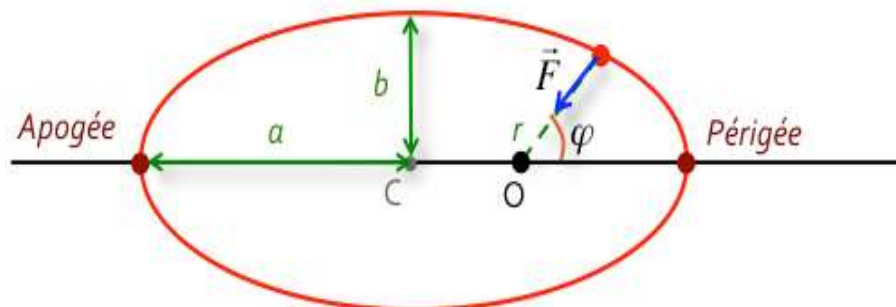
3.1- Trajectoire circulaire

Pour $e = 0$, la conique est un cercle, puisque dans ce cas $r = p$ est constant.



3.2- Trajectoire elliptique

Pour $0 < e < 1$, la trajectoire est une ellipse, pour laquelle O est un des foyers.



On appelle le périgée le point de la trajectoire le plus proche du foyer O ; il est obtenu

pour l'angle $\varphi = 0$, et est situé à une distance $r_{\min}$ de O : $r_{\min} = \frac{p}{1 + e}$

De la même manière on définit l'apogée, qui est le point de la trajectoire le plus loin du point O ; il est obtenu pour $\varphi = \pi$, et est situé à une distance $r_{\max}$ de O :

$$r_{\max} = \frac{p}{1 - e}$$

Il est important de ne pas confondre le point O , un des foyers, et le centre C de l'ellipse. La distance entre un foyer et le centre est donnée par la distance c suivante :

$$c = CO = CF = \sqrt{a^2 - b^2}$$

a étant le demi grand axe, et b le demi petit axe de l'ellipse. L'excentricité, e , et le paramètre, p , de l'ellipse sont alors donnés par les relations suivantes :

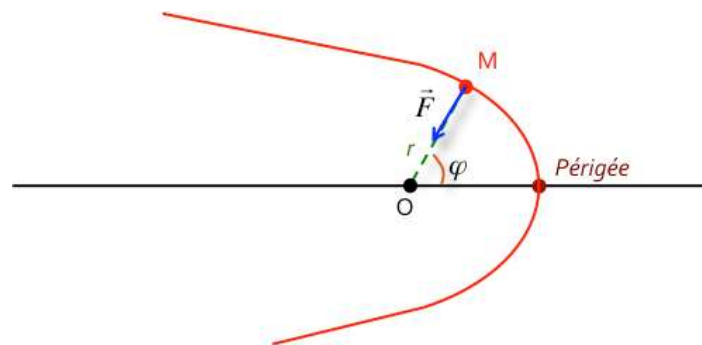
$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{c}{a} ; \quad p = \frac{b^2}{a} ; \quad p = a(1 - e^2)$$

3. 3- Trajectoire parabolique

Pour $e = 1$, la trajectoire est une parabole; l'équation de la trajectoire s'écrit dans ce cas:

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$$

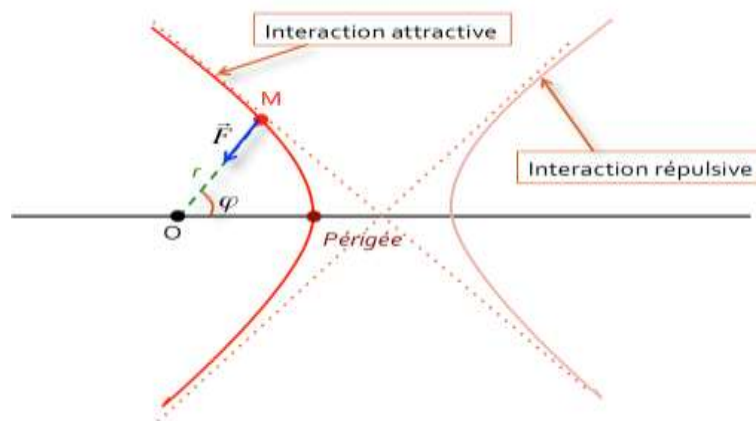
Le périhélie est obtenu pour $\varphi = 0$, et est situé à une distance r_p de O : $r_{\min} = \frac{p}{2}$.



3. 4- Trajectoire hyperbolique

Pour $e > 1$, la trajectoire est une hyperbole. Cependant, puisque les deux branches de l'hyperbole sont déconnectées, le point matériel se déplace uniquement sur l'une des branches de l'hyperbole. L'une correspond à la trajectoire d'un point matériel sous l'action d'une force attractive et l'autre sous l'action d'une force répulsive.

Le périhélie est obtenu pour $\varphi = 0$, et est situé à une distance r_p de O : $r_p = \frac{p}{2}$



Il est à noter aussi que pour $e < 1$ la trajectoire est fermée (cercle ou ellipse) on parle alors d'états liés. La trajectoire est ouverte (parabole ou hyperbole) pour $e \geq 1$ et on parle d'états libres.

4- Classification d'une Trajectoire selon son Energie Mécanique

4.1- Energie Potentielle

La force newtonienne étant conservative, elle dérive d'une énergie potentielle:

$$\vec{F} = -\vec{\text{grad}}E_p. \text{ L'énergie potentielle s'écrit dans ce cas : } E_p = -\frac{k}{r} + \text{Cste}$$

En général, on prend comme état de référence pour l'énergie potentielle associée à une force newtonienne quand $r \rightarrow \infty$; ceci permet d'annuler la constante d'intégration:

$$E_p = -\frac{k}{r}$$

En remplaçant r par l'expression obtenue pour l'équation de la trajectoire E_p s'écrit alors:

$$E_p = -\frac{k}{r}(1 + e \cos \varphi)$$

4. 2- Energie Cinétique

On utilise la deuxième formule de Binet $E_C = \frac{1}{2}mC^2[(u')^2 + u^2]$

Avec $u = \frac{1}{r} = \frac{1}{p}(1 + e \cos \varphi)$ et $u' = \frac{du}{d\varphi} = -\frac{e}{p} \sin \varphi$. L'énergie cinétique s'écrit alors sous la

forme:
$$E_C = \frac{mC^2}{2p^2}(1 + e^2 + 2e \cos \varphi)$$

Ou encore
$$E_C = \frac{k}{2p}(1 + e^2 + 2e \cos \varphi)$$

4. 3- Energie Mécanique

En utilisant les expressions établies ci-haut pour l'énergie potentielle et l'énergie mécanique on obtient l'expression de l'énergie mécanique: $E_m = E_p + E_C$

$$E_m = -\frac{k}{2p}(1 - e^2)$$

L'énergie mécanique, comme prévue, est constante ; sa valeur est alors entièrement

déterminée par les conditions initiales $(\mathbf{r}_0, \mathbf{V}_0)$: $E_m = -\frac{k}{r_0} + \frac{1}{2}mV_0^2$

4. 4- Classification des trajectoires selon l'énergie mécanique

L'énergie mécanique peut être utilisée pour déterminer la trajectoire :

- ♠ $E_m = -\frac{k}{2p} < 0$, Un cercle ($e = 0$).
- ♠ $-\frac{k}{2p} < E_m < 0$, une ellipse ($0 < e < 1$).
- ♠ $E_m = 0$, Une parabole ($e = 1$).
- ♠ $E_m > 0$, Une hyperbole ($e > 1$).

Ainsi on obtient un état lié (trajectoire fermée) pour $E_m < 0$, tandis qu'on a un état libre (trajectoire ouverte) pour $E_m \geq 0$.

III-- Lois de Kepler

Les trois lois de Kepler sont des lois empiriques, elles ont été établies à partir des observations astronomiques du mouvement des planètes:

i) Première loi de Kepler

La trajectoire des centres des planètes décrit une ellipse dont l'un des foyers est le soleil.

ii) Deuxième loi de Kepler

Les rayons vecteurs balaient des aires égales pour des intervalles de temps égaux; c'est la loi des aires.

iii) Troisième loi de Kepler

Le rapport entre le carré de la période T de la révolution d'une planète autour du soleil et le cube du demi-grand axe a de la trajectoire est indépendant de la planète:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4m\pi^2}{k} = \frac{4\pi^2}{GM_{\text{Soleil}}} = \text{Constante}$$

Où G est la constante de gravitation universelle, et M_{Soleil} représente la masse du soleil.

IV – Mouvement des Satellites

On considère le mouvement d'un satellite de masse m autour de la terre. Dans la suite on va noter M_T la masse de la terre et R_T son rayon. Dans ce cas, la constante k s'écrit :

$$k = GmM_T$$

Le mouvement du satellite peut être décrit par son énergie mécanique qui est conservée:

$$E_m = -\frac{GmM_T}{r_0} + \frac{1}{2}mV_0^2$$

Ou encore
$$E_m = -\frac{k}{2p}(1 - e^2) = -\frac{GmM_T}{2p}(1 - e^2)$$

En fixant les conditions initiales, (*c.à.d.* pour r_0 donné on fixe une vitesse initiale correspondante) on fixe la nature de la trajectoire selon la valeur de l'énergie mécanique obtenue.

1- Première Vitesse Cosmique – Vitesse Circulaire

La trajectoire circulaire du satellite correspond à $e = 0$ et $p = r_0$. En utilisant les deux expressions de l'énergie mécanique, on établit la vitesse initiale $V_0 = V_C$, appelée *première vitesse cosmique*, permettant d'avoir cette trajectoire :

$$E_m = -\frac{GmM_T}{r_0} + \frac{1}{2}mV_C^2 = -\frac{GmM_T}{2r_0} \Rightarrow V_C = \sqrt{\frac{GM_T}{r_0}}$$

Un satellite lancé à une vitesse initiale égale à la première vitesse cosmique, à la distance r_0 du centre de la terre aura une trajectoire circulaire de rayon r_0 .

2- Deuxième Vitesse Cosmique – Vitesse de Libération

La vitesse de libération, aussi appelée deuxième vitesse cosmique, correspond à la vitesse initiale minimale nécessaire pour libérer le satellite de l'attraction gravitationnelle de la terre *c.à.d.* permettant au satellite d'avoir une trajectoire ouverte.

La vitesse minimale permettant d'avoir une trajectoire ouverte correspond à la vitesse pour une trajectoire parabolique : $e = 1 \Rightarrow E_m = 0$

$$\text{Puisque } E_m = -\frac{GmM_T}{r_0} + \frac{1}{2}mV_L^2 \Rightarrow V_L = \sqrt{\frac{2GM_T}{r_0}}$$

Par conséquent si la vitesse initiale d'un satellite est supérieure ou égale à sa vitesse de libération sa trajectoire sera ouverte (parabolique ou hyperbolique). Le satellite s'éloignera donc indéfiniment de la terre.

Application :

La trajectoire minimale que peut avoir un satellite correspond à une trajectoire circulaire à altitude négligeable par rapport au rayon de la terre ($r_0 \approx R_T$). Elle

$$\text{correspond à une première vitesse cosmique: } V_C = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}}$$

$$\text{D'un autre côté, la vitesse de libération est égale à } V_L = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{2}V_C$$

Par conséquent pour éviter de perdre un satellite il faut le lancer avec une vitesse initiale V_0 telle que: $V_C < V_0 < V_L = \sqrt{2}V_C$

Application numérique :

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ kg} ; \quad M_T = 6 \times 10^{24} \text{ kg} ; \quad R_T = 6400 \text{ km}$$

Ceci donne les valeurs numériques suivantes, pour les vitesses cosmiques :

$$V_C = 7,9 \times 10^3 \text{ m/s} = 28,5 \times 10^3 \text{ km/h} ; \quad V_L = 11,3 \times 10^3 \text{ m/s} = 40,7 \times 10^3 \text{ km/h}$$

$$28,5 \times 10^3 \text{ km/h} < V_0 < 40,7 \times 10^3 \text{ km/h}$$

3- Satellites Géostationnaires

Définition: Un satellite géostationnaire est un satellite qui est fixe pour un référentiel (observateur) lié à la terre. C'est un satellite qui a la même période de rotation que celle de la terre sur elle-même, *c.à.d.* 24h ou bien 86 400 s.

Pour que le satellite ait une vitesse constante, il faut que sa trajectoire soit circulaire (sinon, on a vu que la vitesse dépend de la distance par rapport à la terre on aura donc une vitesse variable), on utilise alors la première vitesse cosmique:

$$V = V_C = \sqrt{\frac{GM_T}{R}}$$

Or la vitesse angulaire est donnée par $\omega = \frac{V}{R}$, et la période de rotation par

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \frac{R}{V} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM_T}}$$

Le rayon de la trajectoire d'un satellite géostationnaire doit donc être $R = \left(\frac{GM_T T^2}{2\pi^2}\right)^{1/3}$

Application numérique :

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ kg} ; \quad M_T = 6 \times 10^{24} \text{ kg} ; \quad R_T = 6400 \text{ km}$$

$$R = 42300 \text{ km} = 6,6 R_T$$

Cela correspond à une altitude: $h = R - R_T \approx 36\,000 \text{ km}$

Remarque :

Ne pas confondre un satellite géostationnaire à un satellite géosynchrone. Ce dernier à la même période de rotation que celle de la terre mais il n'est pas fixe par rapport à celle-là.

Pour un observateur lié à la terre ce satellite revient au même point de l'espace après une période de 24 h.