

Examen de Mécanique du Point Matériel

Glissement d'un anneau sans frottement sur une tige (T)

I- Etude cinématique

Soit $R(O, x, y, z)$ référentiel terrestre supposé Galiléen muni de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Un petit anneau M de masse m , considéré comme ponctuel, soumis à la pesanteur et susceptible de se déplacer sans frottement le long d'une tige (T). Cette tige tourne autour de l'axe vertical (Oz) avec une vitesse angulaire ω constante et positive, tel que $\vec{\omega} = \omega \vec{k} = \dot{\varphi} \vec{k}$ (voir figure 1).

On définit le référentiel relatif $R_1(O, x_1, y_1, z_1 = z)$ auquel est attachée la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$. Au cours du temps, la tige doit rester dans le plan vertical $(O, \vec{e}_\rho, \vec{k})$ et faisant un angle **constant** θ ($\theta < \frac{\pi}{2} \text{ rad}$) avec l'axe (Oz). On donne $\vec{OM} = r(t) \vec{e}_r$ et $\vec{g} = -g \vec{k}$.

$\vec{e}_\theta$ est le vecteur perpendiculaire à $\vec{e}_r$ dans le plan vertical $(O, \vec{e}_\rho, \vec{k})$ (Voir figure 2).

$(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ est une base orthonormée directe.

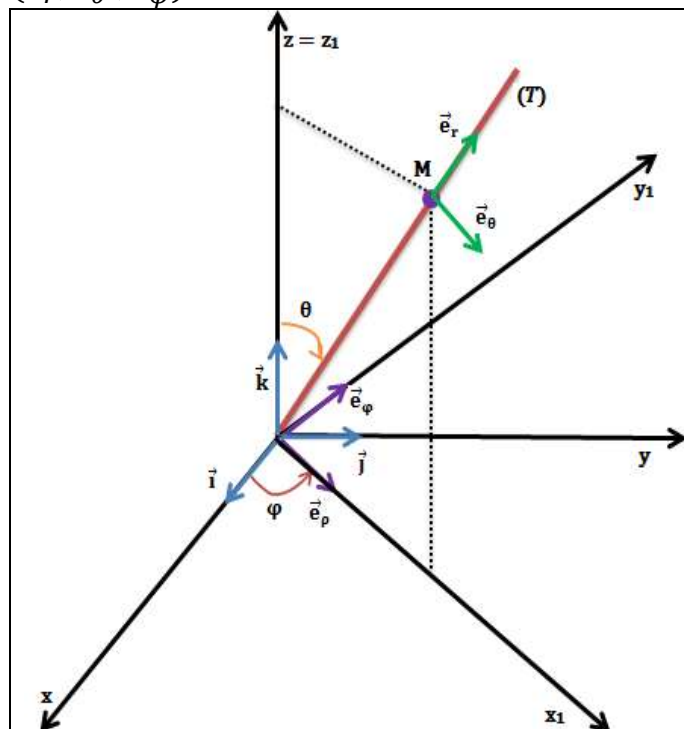


Figure 1

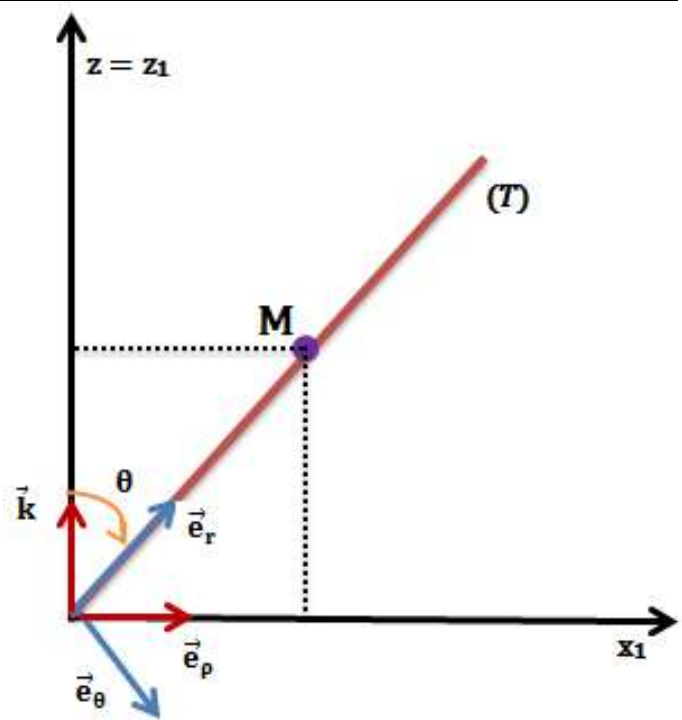


Figure 2

- 1- Exprimer les vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$. 0.5
- 2- Exprimer les produits scalaires suivants : $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\rho$; $\vec{e}_r \cdot \vec{k}$; $\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\theta \cdot \vec{k}$ dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$. 1
- 3- Donner l'expression du vecteur position de M dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$. 0.5

4- Trouver les expressions de la vitesse absolue $\vec{V}(M)_{/R}$ et de l'accélération absolue $\vec{\gamma}(M)_{/R}$ par calcul direct dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$.	1.5
5- Le repère relatif R_1 lié à la tige est-il galiléen ? Justifier votre réponse.	0.5
6- Exprimer les vitesses : relative $\vec{V}_r(M)$ et d'entraînement $\vec{V}_e(M)$ dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$.	1
7- Exprimer les accélérations : relative $\vec{\gamma}_r(M)$, d'entraînement $\vec{\gamma}_e(M)$ et de Coriolis $\vec{\gamma}_c(M)$ dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$	2
8- Les lois de composition des vitesses et des accélérations sont-elles vérifiées?	1
<u>II- Etude dynamique</u>	
9- Donner les expressions vectorielles des forces appliquées à M dans le référentiel relatif R_1 en sachant que la réaction est donnée dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ sous la forme suivante : $\vec{R} = R_\theta \vec{e}_\theta + R_\varphi \vec{e}_\varphi$.	2
10- Ecrire le principe fondamentale de la dynamique (PFD) appliqué à M dans $\mathcal{R}_1$.	1
11- En projetant le PFD suivant $\vec{e}_r$, trouver l'équation différentielle du mouvement de M.	1
12- En projetant le PFD suivant $\vec{e}_\theta$, trouver la composante R_θ de la réaction.	1
13- En projetant le PFD suivant $\vec{e}_\varphi$, trouver la composante R_φ de la réaction.	1
<u>III- Application du théorème de l'énergie cinétique dans $\mathcal{R}$.</u>	
1- Déterminer $E_C(M/\mathcal{R})$ l'énergie cinétique du point M dans $\mathcal{R}$ ainsi que sa dérivée par rapport au temps dans $\mathcal{R}$.	1
2- Déterminer les puissances de chacune des forces agissant sur le point M.	2
3- En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, trouver l'équation différentielle du mouvement.	2
4- Dédurre l'équation horaire du mouvement sachant que : $r(t = 0) = r_0$ et $\dot{r}(t = 0) = 0$.	1

Correction de l'examen de Mécanique du Point Matériel

I- Etude cinématique

1- L'expression des vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$.

$$\vec{e}_r = \sin\theta \vec{e}_\rho + \cos\theta \vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{e}_\theta = \cos\theta \vec{e}_\rho - \sin\theta \vec{k}$$

2- Calcul des produits scalaires suivants : $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\rho$; $\vec{e}_r \cdot \vec{k}$; $\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\theta \cdot \vec{k}$

$$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\rho = \sin\theta \quad ; \quad \vec{e}_r \cdot \vec{k} = \cos\theta \quad ; \quad \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\rho = \cos\theta \quad ; \quad \vec{e}_\theta \cdot \vec{k} = -\sin\theta$$

3- L'expression du vecteur position de M dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$.

$$\vec{OM} = r \vec{e}_r = r \sin\theta \vec{e}_\rho + r \cos\theta \vec{k}$$

4- Les expressions de la vitesse absolue $\vec{V}(M)_{/R}$ et l'accélération absolue $\vec{\gamma}(M)_{/R}$ par calcul direct.

☀ La vitesse absolue $\vec{V}(M)_{/R}$: $\vec{V}(M)_{/R} = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_R = \frac{d}{dt} [r \sin\theta \vec{e}_\rho + r \cos\theta \vec{k}]_R$

Soit $\vec{V}(M)_{/R} = \dot{r} \sin\theta \vec{e}_\rho + r \omega \sin\theta \vec{e}_\varphi + \dot{r} \cos\theta \vec{k}$

☀ L'accélération absolue $\vec{\gamma}(M)_{/R}$:

$$\vec{\gamma}(M)_{/R} = \left(\frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} \right)_R = \left(\frac{d\vec{V}(M)_{/R}}{dt} \right)_R = \frac{d}{dt} [\dot{r} \sin\theta \vec{e}_\rho + r \omega \sin\theta \vec{e}_\varphi + \dot{r} \cos\theta \vec{k}]_R$$

Soit $\vec{\gamma}(M)_{/R} = (\ddot{r} \sin\theta - r \omega^2 \sin\theta) \vec{e}_\rho + 2\omega \dot{r} \sin\theta \vec{e}_\varphi + \ddot{r} \cos\theta \vec{k}$

5- Le repère relatif R_1 lié à la tige (T) n'est pas galiléen, car il est en rotation autour de repère fixe R.

6- Calcul des vitesses : relative $\vec{V}_r(M)$ et d'entraînement $\vec{V}_e(M)$.

☀ La vitesse relative $\vec{V}(M)_{/R_1}$: $\vec{V}(M)_{/R_1} = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{R_1} = \frac{d}{dt} [r(\sin\theta \vec{e}_\rho + \cos\theta \vec{k})]_{R_1}$

Soit $\vec{V}(M)_{/R_1} = \dot{r} \sin\theta \vec{e}_\rho + \dot{r} \cos\theta \vec{k}$

☀ La vitesse d'entraînement $\vec{V}_e(M)$: $\vec{V}_e(M) = \left(\frac{d\vec{OO}}{dt} \right)_R + \vec{\Omega}_{R_1/R} \wedge \vec{OM}$

Soit $\vec{V}_e(M) = \omega \vec{k} \wedge r(\sin\theta \vec{e}_\rho + \cos\theta \vec{k}) = r \omega \sin\theta \vec{e}_\varphi$

7- Calcul des accélérations : relative $\vec{\gamma}_r(M)$, d'entraînement $\vec{\gamma}_e(M)$ et de Coriolis $\vec{\gamma}_C(M)$.

☀ L'accélération relative $\vec{\gamma}_r(M)$:

$$\vec{\gamma}_r(M)_{/R_1} = \left(\frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} \right)_{R_1} = \left(\frac{d\vec{V}(M)_{/R_1}}{dt} \right)_{R_1} = \frac{d}{dt} [\dot{r}(\sin\theta \vec{e}_\rho + \cos\theta \vec{k})]_{R_1}$$

Soit $\vec{\gamma}_r(M)_{/R_1} = \ddot{r} \sin\theta \vec{e}_\rho + \ddot{r} \cos\theta \vec{k}$

☀ L'accélération d'entraînement $\vec{\gamma}_e(M)$:

$$\vec{\gamma}_e(M) = \left(\frac{d^2 \vec{OO}}{dt^2} \right)_R + \frac{d(\vec{\Omega}_{R_1/R})}{dt} \wedge \vec{OM} + \vec{\Omega}_{R_1/R} \wedge (\vec{\Omega}_{R_1/R} \wedge \vec{OM})$$

Soit $\vec{\gamma}_e(M) = \omega \vec{k} \wedge (\omega \vec{k} \wedge r(\sin\theta \vec{e}_\rho + \cos\theta \vec{k})) = -r \omega^2 \sin\theta \vec{e}_\rho$

☀ L'accélération de Coriolis $\vec{\gamma}_C(M)$:

$$\vec{\gamma}_C(M) = 2\overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \wedge \vec{V}_r(M)$$

Soit $\vec{\gamma}_C(M) = 2\overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \wedge \vec{V}_r(M) = 2\omega\vec{k} \wedge \dot{r}(\sin\theta \vec{e}_\rho + \cos\theta \vec{k}) = 2\omega\dot{r}\sin\theta \vec{e}_\varphi$

8- Vérification des lois de composition des vitesses et des accélérations.

☀ Loi de composition des vitesses :

$$\begin{aligned}\vec{V}_r(M) + \vec{V}_e(M) &= \dot{r}(\sin\theta \vec{e}_\rho + \cos\theta \vec{k}) + r\omega\sin\theta \vec{e}_\varphi = \dot{r}\sin\theta \vec{e}_\rho + r\omega\sin\theta \vec{e}_\varphi + \dot{r}\cos\theta \vec{k} \\ &= \vec{V}_a(M)\end{aligned}$$

☀ Loi de composition des accélérations :

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}_r(M) + \vec{\gamma}_e(M) + \vec{\gamma}_C(M) &= \ddot{r}(\sin\theta \vec{e}_\rho + \cos\theta \vec{k}) - r\omega^2\sin\theta \vec{e}_\rho + 2\omega\dot{r}\sin\theta \vec{e}_\varphi \\ &= (\ddot{r}\sin\theta - r\omega^2\sin\theta)\vec{e}_\rho + 2\omega\dot{r}\sin\theta \vec{e}_\varphi + \ddot{r}\cos\theta \vec{k} = \vec{\gamma}_a(M)\end{aligned}$$

I- Etude dynamique

9- Les expressions vectorielles des forces appliquées à M dans le référentiel relatif R_1 .

☀ $\vec{P} = -mg \vec{k}$

☀ $\vec{R} = R_\theta \vec{e}_\theta + R_\varphi \vec{e}_\varphi$

☀ $\vec{F}_{ie} = -m\vec{\gamma}_e = mr\omega^2\sin\theta \vec{e}_\rho$

☀ $\vec{F}_{ic} = -m\vec{\gamma}_C = -2m\omega\dot{r}\sin\theta \vec{e}_\varphi$

10- Le principe fondamentale de la dynamique (PFD) appliqué à M dans $\mathcal{R}_1$.

$$\sum \overrightarrow{F_{réelles}} + \sum \overrightarrow{F_{inerties}} = m\vec{\gamma}_r(M) \Rightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} = m\vec{\gamma}_r(M)$$

Soit

$$-mg \vec{k} + R_\theta \vec{e}_\theta + R_\varphi \vec{e}_\varphi + mr\omega^2\sin\theta \vec{e}_\rho - 2m\omega\dot{r}\sin\theta \vec{e}_\varphi = m\ddot{r}(\sin\theta \vec{e}_\rho + \cos\theta \vec{k})$$

11- Projetant de l'équation du PFD suivant $\vec{e}_r$.

$$\begin{aligned}[-mg \vec{k} + R_\theta \vec{e}_\theta + R_\varphi \vec{e}_\varphi + mr\omega^2\sin\theta \vec{e}_\rho - 2m\omega\dot{r}\sin\theta \vec{e}_\varphi] \cdot \vec{e}_r \\ = [m\ddot{r}(\sin\theta \vec{e}_\rho + \cos\theta \vec{k})] \cdot \vec{e}_r\end{aligned}$$

Ce qui implique : $-mg \cos\theta + mr\omega^2\sin^2\theta = m\ddot{r}(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$

Soit: $\ddot{r} - r\omega^2\sin^2\theta + g\cos\theta = 0$.

12- En projetant le PFD suivant $\vec{e}_\theta$.

$$\begin{aligned}[-mg \vec{k} + R_\theta \vec{e}_\theta + R_\varphi \vec{e}_\varphi + mr\omega^2\sin\theta \vec{e}_\rho - 2m\omega\dot{r}\sin\theta \vec{e}_\varphi] \cdot \vec{e}_\theta \\ = [m\ddot{r}(\sin\theta \vec{e}_\rho + \cos\theta \vec{k})] \cdot \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

Ce qui implique :

$$-mg \sin\theta + R_\theta + mr\omega^2\sin\theta \cos\theta = m\ddot{r}(\sin\theta \cos\theta - \cos\theta \sin\theta) = 0$$

Soit : $R_\theta = -m \sin\theta [g + r\omega^2\cos\theta]$

13- Projetant le PFD suivant $\vec{e}_\varphi$.

$$\begin{aligned}[-mg \vec{k} + R_\theta \vec{e}_\theta + R_\varphi \vec{e}_\varphi + mr\omega^2\sin\theta \vec{e}_\rho - 2m\omega\dot{r}\sin\theta \vec{e}_\varphi] \cdot \vec{e}_\varphi \\ = [m\ddot{r}(\sin\theta \vec{e}_\rho + \cos\theta \vec{k})] \cdot \vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

Ce qui implique : $R_\varphi - 2m\omega\dot{r}\sin\theta = 0$

Soit : $R_\varphi = 2m\dot{r}\sin\theta$.

III- Application du théorème de l'énergie cinétique

1- On détermine $E_c(M/\mathfrak{R})$ l'énergie cinétique du point M dans $\mathfrak{R}$ ainsi que sa dérivée par rapport au temps dans $\mathfrak{R}$.

☀ L'énergie cinétique s'exprime comme suit :

$$E_c(M/\mathfrak{R}) = \frac{1}{2} m V(M/\mathfrak{R})^2 = \frac{1}{2} m ((\dot{r} \sin \theta)^2 + (r \omega \sin \theta)^2 + (\dot{r} \cos \theta)^2)$$

☀ La dérivée de l'énergie cinétique s'exprime alors :

$$\frac{dE_c(M/\mathfrak{R})}{dt} = m \ddot{r} \sin^2 \theta + m r \dot{\omega} \sin^2 \theta + m \ddot{r} \cos^2 \theta$$

2- Déterminons les puissances de chacune des forces agissant sur le point M .

$$\text{☀ } P(\vec{P}/\mathfrak{R}) = \vec{P} \cdot \vec{V}(\vec{P}/\mathfrak{R}) = -mg \vec{k} \cdot (\dot{r} \sin \theta \vec{e}_\rho + r \omega \sin \theta \vec{e}_\varphi + \dot{r} \cos \theta \vec{k}) = -m g \dot{r} \cos \theta$$

$$\begin{aligned} \text{☀ } P(\vec{R}/\mathfrak{R}) &= \vec{R} \cdot \vec{V}(\vec{R}/\mathfrak{R}) = (R_\theta \vec{e}_\theta + R_\varphi \vec{e}_\varphi) \cdot (\dot{r} \sin \theta \vec{e}_\rho + r \omega \sin \theta \vec{e}_\varphi + \dot{r} \cos \theta \vec{k}) = \\ &= (R_\theta \cos \theta \vec{e}_\rho + R_\varphi \vec{e}_\varphi - R_\theta \sin \theta \vec{k}) \cdot (\dot{r} \sin \theta \vec{e}_\rho + r \omega \sin \theta \vec{e}_\varphi + \dot{r} \cos \theta \vec{k}) = \\ &= R_\theta \dot{r} \sin \theta \cos \theta + R_\varphi r \omega \sin \theta - R_\theta \dot{r} \cos \theta \sin \theta = R_\varphi r \omega \sin \theta \end{aligned}$$

3- Par applications du théorème de l'énergie cinétique.

$$\frac{dE_c(M/\mathfrak{R})}{dt} = P(\vec{P}/\mathfrak{R}) + P(\vec{R}/\mathfrak{R})$$

$$\Rightarrow m \ddot{r} \sin^2 \theta + m r \dot{\omega} \sin^2 \theta + m \ddot{r} \cos^2 \theta = -m g \dot{r} \cos \theta + R_\varphi r \omega \sin \theta$$

$$\text{On'a : } R_\varphi = 2m \dot{r} \sin \theta$$

$$\Rightarrow m \ddot{r} \sin^2 \theta + m r \dot{\omega} \sin^2 \theta + m \ddot{r} \cos^2 \theta = -m g \dot{r} \cos \theta + 2m \dot{r} r \omega \sin^2 \theta$$

$$\Rightarrow \ddot{r} \sin^2 \theta + r \dot{\omega} \sin^2 \theta + \ddot{r} \cos^2 \theta = -g \dot{r} \cos \theta + 2r \omega \sin^2 \theta$$

$$\Rightarrow \ddot{r} - r \omega^2 \sin^2 \theta = -g \cos \theta$$

$$\text{On retrouve donc : } \ddot{r} - r \omega^2 \sin^2 \theta + g \cos \theta = 0$$

4- L'équation horaire du mouvement sachant que : $r(t=0) = r_0$ et $\dot{r}(t=0) = 0$.

$$r(t) = A e^{-\omega \sin \theta t} + B e^{\omega \sin \theta t} + \frac{g \cos \theta}{\omega^2 \sin^2 \theta}$$

$$\text{En utilisant les conditions initiales : } \begin{cases} r(t=0) = r_0 = A + B + \frac{g \cos \theta}{\omega^2 \sin^2 \theta} \\ \dot{r}(t=0) = 0 = -A \omega \sin \theta + B \omega \sin \theta \end{cases}$$

$$\text{On trouve donc : } A = B = \frac{1}{2} \left[r_0 - \frac{g \cos \theta}{\omega^2 \sin^2 \theta} \right]$$

$$\text{D'où : } r(t) = \frac{1}{2} \left(r_0 - \frac{g \cos \theta}{\omega^2 \sin^2 \theta} \right) (e^{-\omega \sin \theta t} + e^{\omega \sin \theta t}) + \frac{g \cos \theta}{\omega^2 \sin^2 \theta}$$