



Travaux dirigés de l'électrostatique- Série N°2

Exercice 1 : savoir utiliser les invariances et symétries d'une distribution de charges

i- Distribution linéique

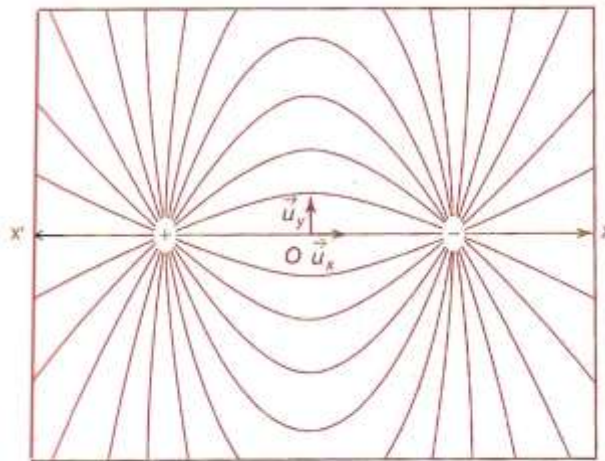
On considère un fil infini $z'Oz$.

1. On suppose qu'il est chargé uniformément en longueur (densité linéique $\lambda > 0$). Déterminer les invariances et les éléments de symétrie du système. En déduire les variables dont dépend le champ électrique $\vec{E}$. Déterminer la direction et le sens de $\vec{E}$ en un point de l'espace.
2. On suppose que la densité linéique est $-\lambda < 0$ pour $z < 0$ et $\lambda > 0$ pour $z > 0$. Quels sont les invariances et les éléments de symétrie du système. En déduire les variables dont dépend le champ électrique $\vec{E}$. Déterminer la direction et le sens de $\vec{E}$ en un point de l'espace. En déduire la direction et le sens de $\vec{E}$ pour un point du plan xOy .

ii- Doublet électrique

On donne sur la figure ci-contre les lignes de champ d'un système de deux charges $+q, -q$ (distantes de l sur l'axe xOx) dans le plan xOy .

1. Préciser les éléments de symétrie de cette distribution.
2. En déduire la direction et le sens du champ électrique $\vec{E}$ selon l'axe Ox ou Oy .
3. A quoi correspond l'équipotentielle $V = 0$?



Réponse

i- Distribution linéique

1) Cherchons les invariances de la distribution par rotation ou translation (Distribution D)

* Rotation : toute rotation d'axe **OZ** laisse la distribution invariante (l'image du fil $z'z$ est le fil $z'z$).

* Translation : toute translation d'axe **Oz** laisse la distribution invariante (le fil étant infini).

* cherchons les plans de symétrie ou d'antisymétrie passant par le point M. Ici, la densité λ est uniforme $\Rightarrow$ il ne peut y avoir que des plans de symétrie :

* Tout plan π_1 contenant l'axe **OZ** est plan de symétrie $\Rightarrow$ On l'appelle plan miroir.

* Tout plan π_2 perpendiculaire à l'axe **OZ** (par exemple **XOY**) est plan de symétrie

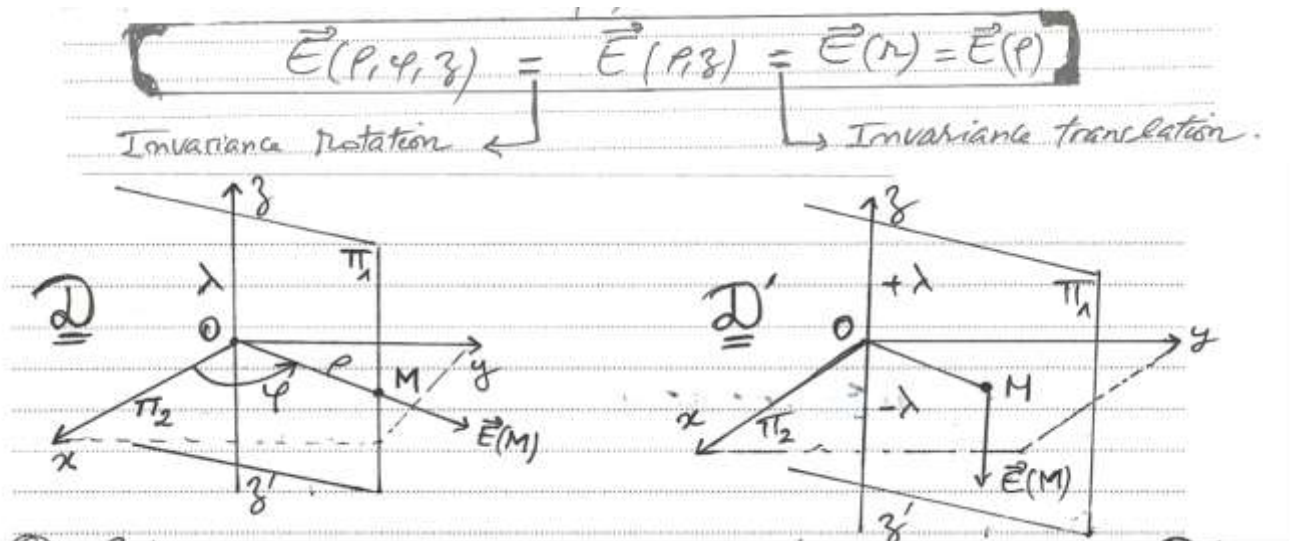
⇒ On l'appelle plan antimiroir.

⇒ En coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) , $\vec{E}$ ne peut pas dépendre de φ ni de z

⇒ $\vec{E}$ ne dépend que de $r = \rho$.

De plus, en raison des symétries, $\vec{E}$ est radial en un point quelconque de l'espace :

$$\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$$



2) Selon le même raisonnement, la distribution de charge D' est bien invariante par rotation, mais plus par translation à cause du passage de $-\lambda$ à $+\lambda$.

* De même, un plan π_1 contenant l'axe OZ est toujours plan de symétrie, tandis que le plan xOy devient un plan de symétrie ⇒ $\vec{E}$ dépend de ρ et de z .

* En un point du plan xOy, $\vec{E}$ est dirigé selon la $\perp$ (perpendiculaire) à ce plan (le vecteur unitaire $\vec{n}$ est parallèle et de même sens que $-\vec{u}_z$) ⇒ le champ $\vec{E}$ s'éloigne des charges positives (sens des potentiels décroissantes).

ii- Doublet électrique

1) * L'axe $x'Ox \equiv x'x$ portant les charges est un axe de symétrie du système ⇒ tout plan contenant l'axe $x'x$ est plan miroir (par exemple le plan xOy).

* L'axe $y'y$ est un axe d'antisymétrie du système (l'image de $+q$ est $-q$) ⇒ le plan yOz est un plan antimiroir.

2) Le champ électrostatique présente les mêmes symétries que la distribution ⇒ il est contenu dans tout plan (xOy) et perpendiculaire à tout plan antimiroir (yOz) ⇒

* sur l'axe Ox : $\vec{E}$ colinéaire à Ox des sens $\vec{u}_x$;

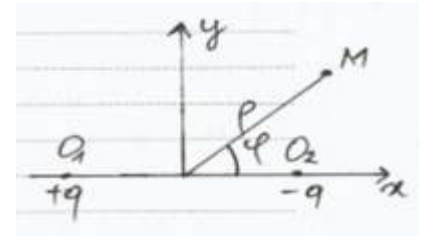
* sur l'axe Oy : $\vec{E}$ perpendiculaire à Oy des sens $\vec{u}_x$;

! le champ se dirige dans le sens des potentiels décroissantes.

3) En tout point $M(x, y)$ ou $M(\rho, \varphi)$:

$$V(M) = \frac{+q}{4\pi\epsilon_0 O_1 M} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 O_2 M} = \frac{+q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{O_1 M} - \frac{1}{O_2 M} \right)$$

$$\Rightarrow V(M) = 0 \Leftrightarrow O_1 M = O_2 M$$



⇒ M est donc sur la médiatrice du segment O_1O_2 , soit l'axe $y'Oy \equiv y'y$.

⇒ Par symétrie de résolution, l'équipotentielle $V = 0$ correspond au plan yOz .

Exercice 2 : savoir calculer directement $\vec{E}$ par intégration vectorielle.

Champ créé par un disque ou un plan uniformément chargé en surface

Soit une distribution surfacique uniforme ($\sigma > 0$).

1. Sa géométrie est celle d'un disque de centre O dans le plan xOy . Établir l'expression du champ électrostatique en un point $M(z)$ de l'axe Oz . Représenter le graphe $E(z)$.

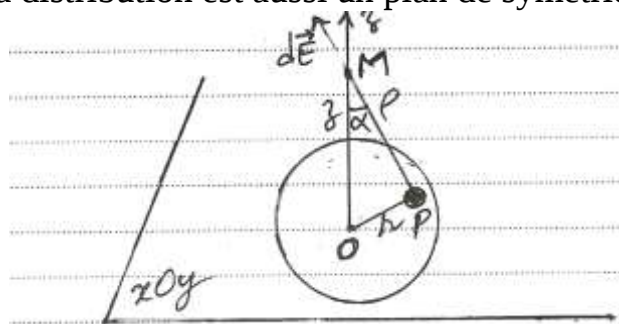
2. Sa géométrie est celle d'un plan infini xOy . Exprimer le champ électrostatique en un point $M(z)$ de l'axe Oz . Représenter le graphe $E(z)$.

Réponse de l'exercice 2 :

1) La symétrie de la distribution de charges impose de choisir les coordonnées cylindriques. Tout plan contenant l'axe Oz est un plan de symétrie de la distribution de charges.

⇒ Le champ est donc porté par Oz , $M \in Oz$: $\vec{E} = E(z)\vec{u}_z$

Le plan xOy qui contient la distribution est aussi un plan de symétrie, donc : $E(-z) = -E(z)$



Raisonnons sur $z > 0$. Le champ élémentaire créé par la charge élémentaire $dq_p = \sigma dS$ en M, tel que $PM = \rho$ est :

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma ds}{PM^2} \vec{u}_{PM}$$

De composante utile : (la composante utile) $dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma ds}{\rho^2}$ (projection sur Oz)

Découpons une surface élémentaire dS (couronne circulaire comprise entre r et $r + dr$)

$$\Rightarrow dS = 2\pi r dr$$

$$\text{Avec } r = z \tan \alpha \text{ et } dr = \frac{z}{\cos^2 \alpha} d\alpha$$

$$\text{D'autre part : } z = \rho \cos \alpha \text{ et } \rho = \frac{z}{\cos \alpha}$$

$$\Rightarrow E(z) = \int_0^R \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma 2\pi r dr \cos \alpha}{\rho^2}$$

$$\Rightarrow E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^{\alpha_{\max}} \frac{z \tan \alpha \frac{z d\alpha}{\cos^2 \alpha} \cos \alpha}{z^2 / \cos^2 \alpha}$$

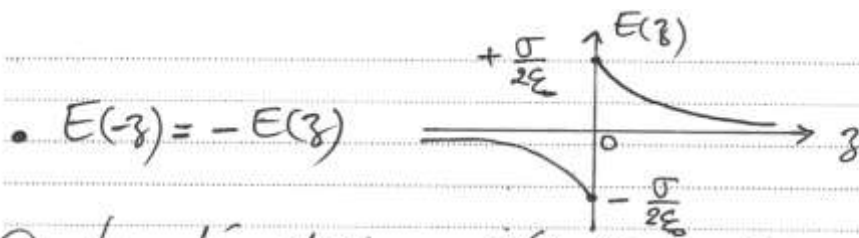
$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^{\alpha_{\max}} \sin \alpha d\alpha$$

⇒ Pour $z > 0$:

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (1 - \cos \alpha_{\max})$$

$$\Rightarrow E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right)$$

Le champ s'éloigne vectoriellement des charges positives et change de sens à la traversée du disque chargé.
 ⇒ la discontinuité entre $z \rightarrow 0^+$ et $z \rightarrow 0^-$ est de $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$.



② La démonstration précédente se conserve. Il suffit d'intégrer pour la variable h entre 0 et $R \cos \alpha$, ou pour la variable α entre 0 et $\alpha_{\max} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

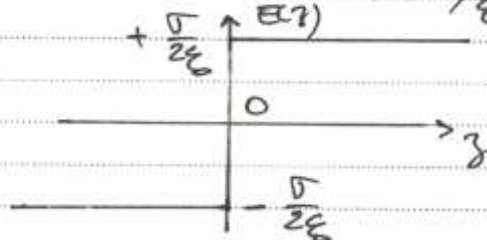
$$E(z) = + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{ pour } z > 0$$

et

$$E(-z) = -E(z)$$

On observe encore la discontinuité de $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ à la traversée du plan chargé.

* Discontinuité de $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$.

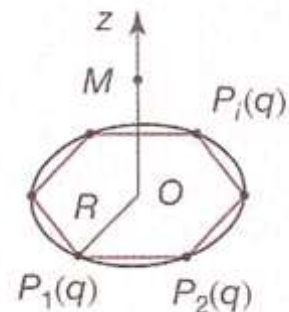


Exercice 3 : savoir calculer un champ électrique en passant par le potentiel.

Potentiel et champ sur l'axe d'un polygone régulier

n charges ponctuelles $+q > 0$ sont disposées aux n sommets d'un polygone régulier situé dans le plan xOy . L'axe Oz est un axe de symétrie d'ordre n du polygone. On pose $OP_i = R$.

1. Établir le potentiel électrostatique $V(M)$ créé en un point M de l'axe Oz de la distribution.
2. En déduire le champ électrostatique créé en M .
3. Représenter les courbes $V(z)$ et $E(z)$.
4. Interpréter physiquement le cas $n \rightarrow \infty$.



Réponse de l'exercice 3

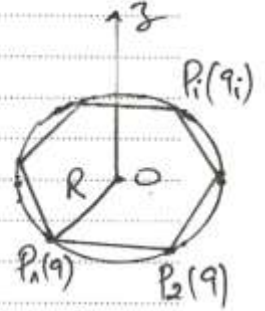
① Il suffit d'utiliser le principe de superposition :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i} \Rightarrow V = \frac{nq}{4\pi\epsilon_0 R} \text{ où } P_i \text{ est l'un}$$

des sommets du polygone.

On obtient :

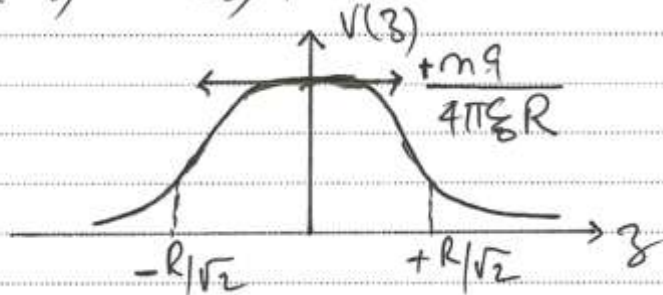
$$V(z) = \frac{nq}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}}$$



② La relation champ-potential s'écrit $\vec{E} = -\text{grad} V$. Pour un point de l'axe Oz, le potentiel ne dépend que de z et le champ par symétrie est dirigé selon Oz (si $z > 0$, selon $+\vec{u}_z$, sens des potentiels décroissants).

$$E(z) = -\frac{dV}{dz} = \frac{+nqz}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}}$$

③ Pour $z > 0$, $V(z)$ est strictement décroissant et par symétrie $V(-z) = V(z)$, On obtient :

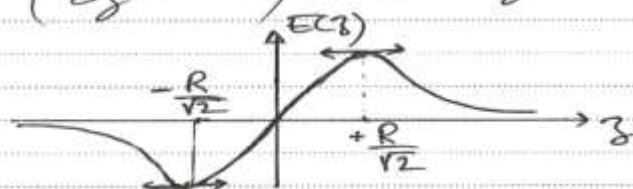


Le champ change de sens à la traversée du plan xOy. Il est continu ($E(0)=0$) et représente à chaque instant l'opposé de la dérivée de la fonction $V(z)$.

$$\Rightarrow \frac{dE}{dz} = \frac{nq}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(R^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{z(2z)}{(R^2 + z^2)^{5/2}} \right]$$

$$= \frac{nq}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(R^2 + z^2 - 3z^2)}{(R^2 + z^2)^{5/2}}$$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dz} = 0 \text{ ou } \left(\frac{d^2V}{dz^2} = 0 \right) \Leftrightarrow z = \pm \frac{R}{\sqrt{2}}$$



④ Lorsque $n \rightarrow \infty$, la distribution correspond à un anneau de centre O et de rayon R, chargé uniformément en longueur λ , tel que :

$$Q_{\text{totale}} = nq = \lambda 2\pi R$$

$$\Rightarrow \boxed{V(z) = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}}} \quad \text{et} \quad \boxed{E(z) = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}}}, \quad \underline{z > 0}$$

Exercice N°4

Nous assimilons le noyau d'uranium à une boule de rayon a, de centre O et de charge Q uniformément répartie avec la densité volumique ρ .

On admet que la permittivité à l'intérieur, comme à l'extérieur du noyau, est $\epsilon_0 \approx 8.85 \times 10^{-12} \text{ m}^{-3} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^4 \cdot \text{A}^2 \approx 8.85 \times 10^{-12} \text{ SI}$.

1. Que vaut la charge totale Q portée par le noyau ${}^{235}_{92}\text{U}$.
2. Exprimer ρ , la densité volumique de charge, en fonction de Q et a.
3. Déterminer la charge $q(r)$ contenue dans une sphère de centre O et de rayon r, prise au sein du noyau.
4. Déterminer la charge $dq(r)$ contenue entre une sphère de rayon r et une sphère $r + dr$ au sein du noyau. Calculer le potentiel au point O, centre du noyau, en fonction de ϵ_0 , Q et a.

Réponse exercice N°4

① Le noyau d'uranium possède 92 protons de charge +e.

$$\Rightarrow Q_{\text{totale}} = Q = 92e$$

② La charge Q est supposée répartie uniformément dans le volume de la sphère :

$$\Rightarrow \rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3} = \frac{3Q}{4\pi a^3}$$

③ Par simple proportionnalité : $\rho = \frac{Q}{V} = \frac{q(r)}{V(r)} \Rightarrow$

$$q(r) = Q \cdot \frac{r^3}{a^3}$$

④ a) On peut soit calculer directement dq d'après la relation $dq = \rho dV$, en remarquant que $dV = 4\pi r^2 dr \Rightarrow$

$$dq = \rho 4\pi r^2 dr = \frac{3Qr^2}{a^3} dr$$

Soit obtenir ce résultat par différentiation de $q(r)$.

b) Le point O est centre de symétrie de la distribution.

La charge dq comprise entre la sphère de rayon r et la sphère de rayon $r+dr$ crée au point O le potentiel élémentaire suivant,

$$dV(O) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Rightarrow V(O) = \int_0^a \frac{\rho 4\pi r^2 dr}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

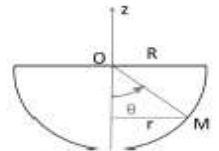
$$\Rightarrow V(O) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \int_0^a r dr = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0} = \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 a}$$

$$\Rightarrow V(O) = \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 a}$$

Exercice 5 : demi-sphère électrisée σ et $\sigma_0 \cos\theta$

1. On considère une demi-sphère (S) de centre O et de rayon R , portant une densité surfacique de charge $\sigma > 0$ répartie uniformément sur sa surface demi-sphérique.

- Exprimer le potentiel créé au point O .
- Calculer le champ électrostatique créé au point O .



2. Désormais la demi-sphère (S) est chargée avec une densité surfacique non-uniforme $\sigma_M = \sigma_0 \cos\theta$.

- Calculer le potentiel créé au point O .
- Calculer le champ électrostatique créé au point O .
- En déduire sans calculs supplémentaires le potentiel et le champ créés par une sphère de centre O et de rayon R , chargée en surface avec $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$ au point O .

Réponse de l'exercice N°5

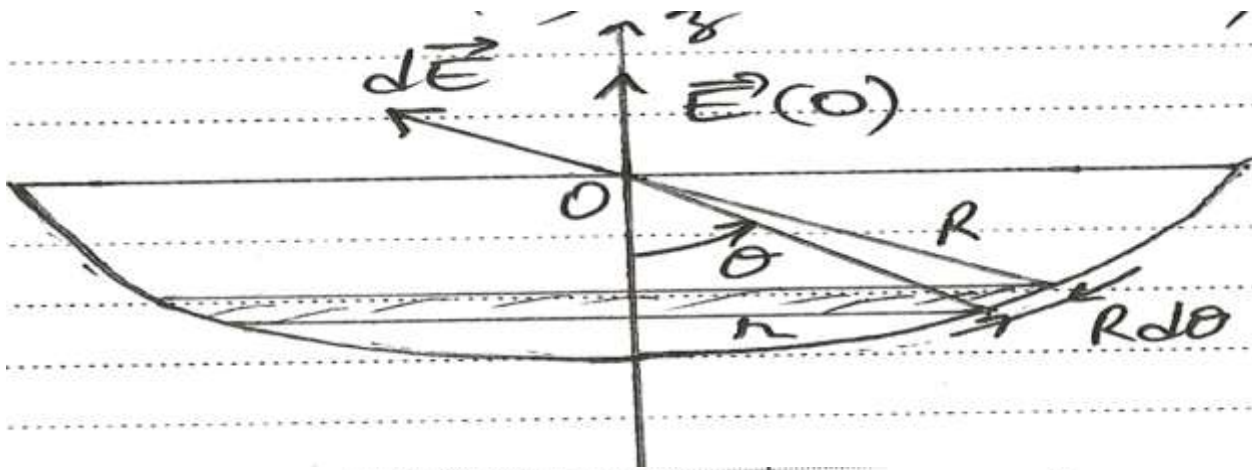
①. a) Le calcul de $V(O)$ se fait aisément :

$$V(O) = \int_S \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R} = \iint_S \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\sigma 2\pi R^2}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0}$$

$\xrightarrow{\quad} S \equiv \text{demi-sphère}$

⚠ $V(O)$ est la valeur du potentiel $V(r)$ en un point :
C'est le point $O \Rightarrow V(r) \neq V(O)$

b) Le calcul de $\vec{E}(O)$ nécessite une somme Vectorielle.
Tout plan contenant l'axe Oz est plan de symétrie de la distribution $\Rightarrow \vec{E}(O)$ est donc porté par Oz .



$$\vec{E}(O) = \int_S dE_z \vec{u}_z = \int_S \frac{dq \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{u}_z = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0 R^2} \int_S dS \cos \theta \vec{u}_z$$

En choisissant une couronne sphérique interceptée par l'angle $d\theta$.

$$\Rightarrow dS = (2\pi R)(R d\theta) = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta$$

On se ramène ainsi à une intégrale simple :

$$\vec{E}(O) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta (\cos \theta d\theta) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(O) = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \vec{u}_z}$$

2.a) Ici encore, toute la charge se situe à la distance R du point O :

$$\Rightarrow V(O) = \int_S \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Mais la charge Q se déduit désormais d'une intégration :

$$\Rightarrow Q = \int_S dq = \int_S \sigma dS = \int_S \sigma_0 \cos \theta dS = \sigma_0 \int_S \cos \theta dS$$

On retrouve l'intégrale précédemment calculée en 1.b)

$$\Rightarrow V(O) = \frac{\sigma_0 R}{4\epsilon_0}$$

2-b)

Le calcul du champ se fait de façon identique à celle de la question 1.b) car l'axe Oz est resté axe de symétrie de la distribution :

$$\vec{E}(0) = \int_S dE_z \vec{u}_z = \int_S \frac{(\sigma_0 \cos\theta ds) \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{u}_z$$

$$= \frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0 R^2} \int_S ds \cos^2\theta \vec{u}_z$$

avec $ds = 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$. Par suite :

$$\vec{E}(0) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \left(\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \sin\theta d\theta \right) \vec{u}_z = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \left(\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta d(\cos\theta) \right) \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \vec{E}(0) = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \left[\frac{\cos^3\theta}{3} \right]_0^{\pi/2} \vec{u}_z \Rightarrow \boxed{\vec{E}(0) = + \frac{\sigma_0}{6\epsilon_0} \vec{u}_z}$$

2-c) Le plan xOy (ou plan équatorial) est plan d'antisymétrie de la distribution de charges :

$$\theta \in [0, \frac{\pi}{2}] : \sigma = \sigma_0 \cos\theta > 0 \text{ et } \theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi] : \sigma = \sigma_0 \cos\theta < 0$$

$\Rightarrow$ La charge totale de la sphère est nulle.

$\Rightarrow$ Le principe de superposition conduit au champ résultant :

$$\vec{E}_{\text{total}}(0) = \vec{E}_{\text{tot}}(0) = \boxed{+ \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} \vec{u}_z}$$

Δ Le champ $\vec{E} \perp$ au plan d'antisymétrie (plan antimitroir).

Exercice N°6 (couronne circulaire électrisée) : Soit une couronne circulaire de centre O et de rayons extrêmes a et b ($b > a$), chargée uniformément avec la densité $\sigma > 0$.

1. Calculer le potentiel $V(M)$ créé par la couronne au point M de son axe de symétrie de révolution Oz ($\overrightarrow{OM} = z$). Représenter $V(z)$.

2. En déduire le champ électrostatique $\vec{E}(M)$.

3. Montrer que lorsque la largeur $b - a$ est faible devant le rayon a , la distribution de charge est équivalente à une distribution linéique dont on déterminera la densité linéique de charge λ .

4. Soit Q la charge totale de la distribution linéique.

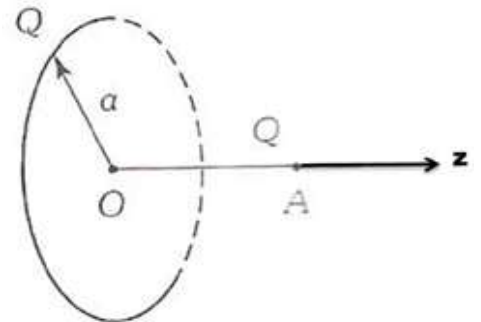
4-1- Établir en fonction de Q , a , ϵ_0 et z le potentiel $V(M)$ puis le champ électrostatique $\vec{E}(M)$.

4-2- Déterminer les valeurs de z pour lesquelles le champ présente un extremum. Représenter $\vec{E}(z)$.

5. On dispose sur l'axe Oz de la distribution linéique circulaire (Q), des charges positives réparties uniformément sur le segment OA de longueur a (le rayon précédent) et de charge Q (la charge précédente).

Déterminer l'expression de la résultante des forces $\vec{F}$ qu'exerce la distribution circulaire sur la distribution du segment OA .

Réponse de l'exercice N°6



① Une charge élémentaire dq située autour du point P de la distribution surfacique crée un potentiel élémentaire au point M :

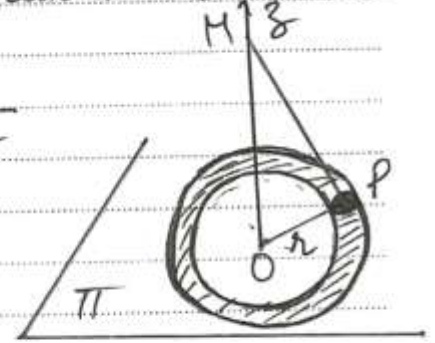
$$dV(M) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 PM} = \frac{\sigma ds}{4\pi\epsilon_0 PM}$$

On découpe une couronne élémentaire circulaire de centre O et de rayons r et $r+dr$:

$$ds = 2\pi r dr \text{ et } PM = \sqrt{r^2 + z^2}$$

$$\Rightarrow dV(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

$$\Rightarrow V(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_a^b \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{b^2 + z^2} - \sqrt{a^2 + z^2} \right)$$



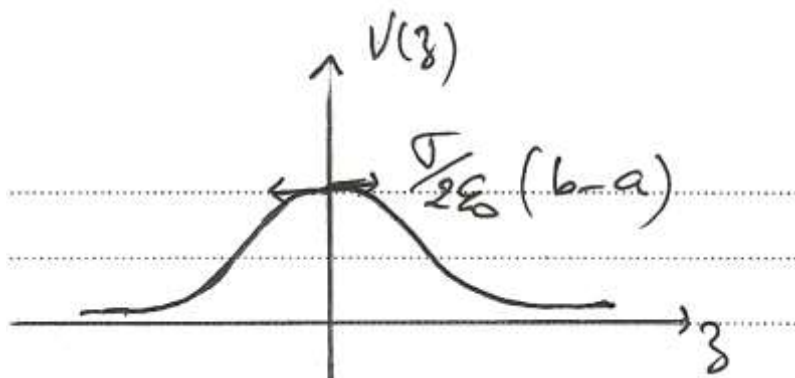
On remarque que $V(M)$ est maximal pour $z=0$ et décroît de manière symétrique lorsque l'on s'éloigne des charges

② On déduit le champ $\vec{E}(M)$ par la relation champ-potential. le champ $\vec{E}(M)$ appartient nécessairement à l'axe de symétrie de révolution, et ne dépend (comme le potentiel) que de la variable z .

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = E(z) \vec{u}_z = - \text{grad } V(z) = - \frac{dV}{dz} \vec{u}_z$$

$$E(z) = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2 + z^2}} \right] \text{ pour } z > 0$$

Le plan de la couronne (π) étant plan de symétrie de la distribution, $E(-z) = -E(z)$, d'où la variation pour tout z .



- ③ Lorsque $b-a$ est faible, toutes les charges se trouvent à la même distance PM du point M .
 $\Rightarrow b-a$ est alors équivalent à dr de la question ①.
 $\Rightarrow$ la conservation de la charge :

$$Q = \sigma \pi (b^2 - a^2) = \lambda 2\pi a$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\sigma(b^2 - a^2)}{2a}$$

- ④ Le calcul du potentiel est immédiat (toutes les charges sont équidistantes de M):

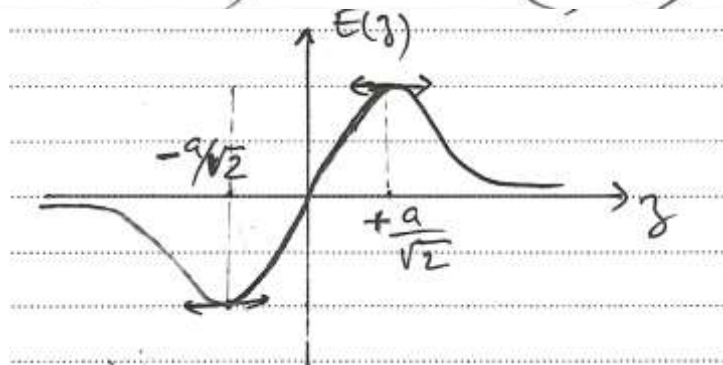
$$U(z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 PM} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + z^2}}$$

Le champ $\vec{E}$ se déduit de $\vec{E} = -\text{grad } V$:

$$\Rightarrow \begin{cases} E(z) = -\frac{dV}{dz} = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 (a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ pour } z > 0 \\ E(-z) = -E(z) \end{cases}$$

L'extremum correspond à $\frac{dE}{dz} = 0$, soit :

$$\frac{1}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + z \frac{(-\frac{3}{2} 2z)}{(a^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = 0 = \frac{a^2 + z^2 - 3z^2}{(a^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \Rightarrow z = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$$



⑤ La densité linéique de charge du segment OA est telle que $Q = \lambda a$.
 Toute charge élémentaire $dq' = \lambda' dz$ est soumise à une force élémentaire portée par Oz et de sens $\vec{E}(z)$, c'est-à-dire $\vec{u}_z$.
 $\Rightarrow dF(z) = dq' E(z) = \lambda' E(z) dz = -\lambda' dV \quad (E(z) = -\frac{dV}{dz})$
 Sur tout le segment OA : $\vec{F} = -\lambda' [V(a) - V(0)] \vec{u}_z$
 (L'intégration se fait entre 0 et a).
 $\Rightarrow \vec{F} = \frac{Q}{a} \left[\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a\sqrt{2}} \right] \vec{u}_z = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \vec{u}_z$.
 Remarque : Cette force tend à éloigner les charges de même signe.

Exercice N° 7 : cylindre charge en surface

Soit un cylindre de rayon R et de hauteur $h = 2L$, portant une charge surfacique uniforme

1. Calculer, en fonction de σ , R , L et ϵ_0 , le potentiel $V(O)$.

2. Déterminer la charge Q portée par le cylindre.

Réponse de l'exercice N°7

① La distribution n'étant pas infinie, on utilise le découpage en anneaux d'épaisseur dz . On obtient : ($dS = 2\pi R dz$)
 ($dq = \sigma dS$) :

$$V(O) = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}} = \int_{-L}^L \frac{\sigma 2\pi R dz}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}}$$

$$\Rightarrow V(O) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} R \ln \frac{L + \sqrt{R^2 + L^2}}{-L + \sqrt{R^2 + L^2}}$$

② La répartition de charges étant uniforme, on obtient :

$$Q = \sigma S = \sigma (2\pi R) (2L) = 4\pi \sigma R L$$

