

Examen de Mécanique du Point Matériel

Glissement d'un anneau sans frottement sur une tige (T)

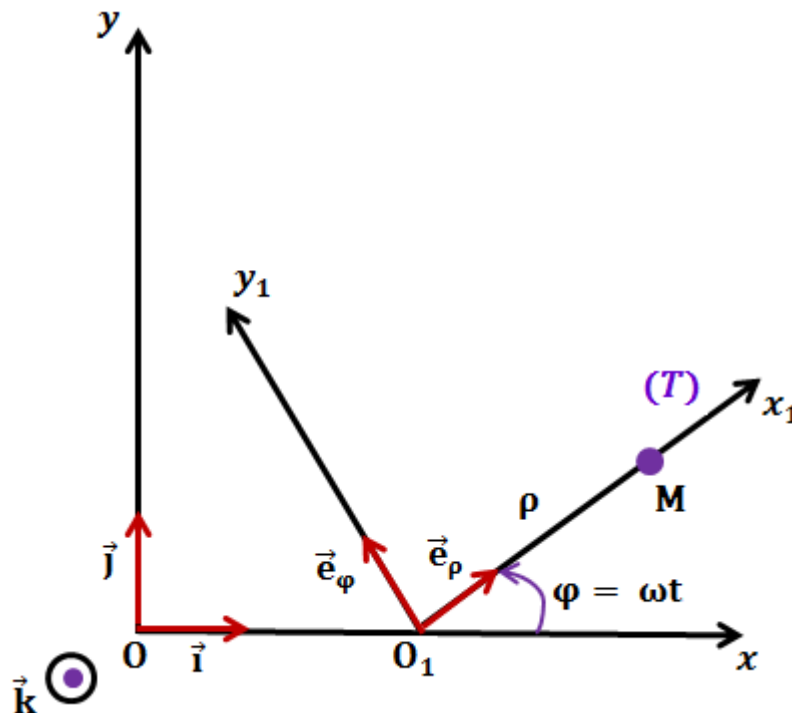
Soit Oxy un plan vertical d'un référentiel fixe supposé Galiléen $R(O, x, y, z)$ de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormée et directe. Un point matériel M de masse m se déplace sans frottement sur une tige (T) qui constamment (toujours) en contact par son extrémité O_1 avec l'axe ox . Le point O_1 se déplace sur l'axe ox .

Soit $R_1(O_1, x_1, y_1, z_1 = z)$ de base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ orthonormée et directe, un référentiel relatif lié à la tige (T) tel que l'axe O_1x_1 confondu avec (T).

La tige (T) effectue également un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe O_1z_1 .

M est lancée depuis le point O avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_\rho = v_0 \vec{i}$ ($v_0 > 0$), elle soumit en plus des forces habituelles, à une force $\vec{F} = \ddot{x} m \cos \varphi \vec{e}_\rho$ avec $\ddot{x} = a$. (Voir figure ci-dessous).

Les paramètres du système seront : $\|\vec{OO}_1\| = x(t)$, $\|\vec{O}_1\vec{M}\| = \rho(t)$ et $\varphi(t) = (\vec{i}, \vec{e}_\rho)$



N.B : Toutes les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$

Partie I : Etude dans le référentiel $\mathcal{R}$ (Galiléen)

- 1- Donner le vecteur vitesse de rotation de $\mathcal{R}_1$ par rapport à $\mathcal{R}$: $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R})$.
- 2- Calculer le vecteur position $\vec{OM}$, la vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ et l'accélération $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$ de M .
- 3- Justifier que la composante R_ρ selon $\vec{e}_\rho$ de la réaction $\vec{R}$ est nulle.

- 4- Exprimer les forces appliquées à M dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ par rapport au référentiel galiléen.
- 5- Ecrire le principe fondamentale de la dynamique (PFD).
- 6- Par projection du PFD suivant $\vec{e}_\rho$; déduire l'équation différentielle du mouvement.

II- Application du théorème du moment cinétique

- 1- Déterminer $\vec{\sigma}_O(M/\mathcal{R})$ le moment cinétique en O du point M ainsi que sa dérivée par rapport au temps dans $\mathcal{R}$.
- 2- Déterminer les moments de chacune des forces agissant sur le point M.
- 3- En appliquant le théorème du moment cinétique, trouver les expressions de la composante de $\vec{R}$.

Partie II : Etude dans le référentiel $\mathcal{R}_1$ (non Galiléen)

- 1- Le référentiel $\mathcal{R}_1$ est-il Galiléen ? Justifier clairement votre réponse.
- 2- Calculer la vitesse relative $\vec{V}(M/\mathcal{R}_1)$ et la vitesse d'entraînement $\vec{V}_e(M)$.
- 3- Calculer l'accélération relative, l'accélération d'entraînement et l'accélération de Coriolis du point M.
- 4- Les lois de composition des vitesses et des accélérations sont-elles vérifiées?
- 5- Donner l'expression des forces appliquées à M dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$.
- 6- Ecrire le principe fondamentale de la dynamique (PFD) dans $\mathcal{R}_1$.
- 7- Retrouver l'équation différentielle du mouvement. Déduire l'équation horaire du mouvement.
- 8- Retrouver les expressions des composantes de la réaction.
- 9- Quelle sera la vitesse minimale de M sur la tige pour que le contact entre M et (T) puisse continuer à exister dans le temps?

Correction de l'examen de Mécanique du Point Matériel

Partie I : Etude dans le référentiel $\mathcal{R}$ (Galiléen)

I- Application du principe fondamentale de la dynamique

1- Le vecteur vitesse de rotation de R_1 par rapport à R est : $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}) = \dot{\varphi} \vec{k} = \omega \vec{k}$.

2- Calculons le vecteur position $\vec{OM}$, la vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ et l'accélération $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$ de M dans $\mathcal{R}$.

☀ Vecteur position : $\vec{OM} = x \vec{i} + \rho \vec{e}_\rho = (x \cos \varphi + \rho) \vec{e}_\rho - x \sin \varphi \vec{e}_\varphi$

☀ Vecteur vitesse : $\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \left. \frac{d\vec{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \dot{x} \vec{i} + \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \omega \vec{e}_\varphi$

$$\Rightarrow \vec{V}(M/\mathcal{R}) = (\dot{x} \cos \varphi + \dot{\rho}) \vec{e}_\rho + (\rho \omega - \dot{x} \sin \varphi) \vec{e}_\varphi$$

☀ Vecteur accélération :

$$\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = \left. \frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R})}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \frac{d(\dot{x} \vec{i} + \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \omega \vec{e}_\varphi)}{dt}$$

$$= \ddot{x} \vec{i} + \ddot{\rho} \vec{e}_\rho + \dot{\rho} \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \dot{\rho} \omega \vec{e}_\varphi + \rho \omega \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}$$

$$\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = (\ddot{x} \cos \varphi + \ddot{\rho} - \rho \omega^2) \vec{e}_\rho + (2\dot{\rho} \omega - \ddot{x} \sin \varphi) \vec{e}_\varphi$$

$$\text{Avec : } \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \omega \vec{e}_\varphi \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\omega \vec{e}_\rho$$

3- R_1 est nulle car M se déplace sans frottement sur la tige (T)

4- On exprime les forces appliquées à M dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ par rapport au référentiel galiléen

☀ le poids : $\vec{P} = m \vec{g} = -mg \vec{j} = -mg(\sin \varphi \vec{e}_\rho + \cos \varphi \vec{e}_\varphi)$,

☀ la réaction de la tige qui est normale à celle-ci, puisque les frottements sont négligeables (la composante de $\vec{R}$ suivant $\vec{e}_\rho$ est nul : $R_\rho = 0$) : $\vec{R} = R_\varphi \vec{e}_\varphi + R_z \vec{k}$

☀ La force : $\vec{F} = \ddot{x} m \cos \varphi \vec{e}_\rho$

5- Ecrivons le principe fondamentale de la dynamique (PFD) par rapport au référentiel Galiléen :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$$

$$\begin{aligned} -mg(\sin \varphi \vec{e}_\rho + \cos \varphi \vec{e}_\varphi) + R_\varphi \vec{e}_\varphi + R_z \vec{k} + \ddot{x} m \cos \varphi \vec{e}_\rho &= \\ &= m(\ddot{x} \cos \varphi + \ddot{\rho} - \rho \omega^2) \vec{e}_\rho + m(2\dot{\rho} \omega - \ddot{x} \sin \varphi) \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -m(g\sin\varphi - \ddot{x} \cos\varphi) \vec{e}_\rho + (\mathbf{R}_\varphi - m\mathbf{g}\cos\varphi)\vec{e}_\varphi + \mathbf{R}_z\vec{k} \\
& = m(\ddot{x} \cos\varphi + \ddot{\rho} - \rho\omega^2) \vec{e}_\rho + m(2\dot{\rho}\omega - \ddot{x} \sin\varphi) \vec{e}_\varphi
\end{aligned}$$

6- on déduit l'équation différentielle du mouvement.

Pour trouver cette équation, il faut faire une projection sur un vecteur de telle sorte éliminer les composantes de la réaction.

$$\Rightarrow -m(g\sin\varphi - \ddot{x} \cos\varphi) = m(\ddot{x} \cos\varphi + \ddot{\rho} - \rho\omega^2) \Rightarrow \ddot{\rho} - \omega^2\rho = -g\sin\varphi$$

II- Application du théorème du moment cinétique

1- Déterminons $\vec{\sigma}_O(M/\mathcal{R})$ le moment cinétique en O du point M ainsi que sa dérivée par rapport au temps dans $\mathcal{R}$.

$$\begin{aligned}
\vec{\sigma}_O(M/\mathcal{R}) &= \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}(M/\mathcal{R}) \\
&= [(x \cos\varphi + \rho) \vec{e}_\rho - x \sin\varphi \vec{e}_\varphi] \\
&\quad \wedge m[(\dot{x} \cos\varphi + \dot{\rho}) \vec{e}_\rho + (\rho\omega - \dot{x} \sin\varphi) \vec{e}_\varphi] \\
&= m[(x \cos\varphi + \rho)(\rho\omega - \dot{x} \sin\varphi) + x \sin\varphi (\dot{x} \cos\varphi + \dot{\rho})] \vec{k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{\sigma}_O(M/\mathcal{R})}{dt} &= m(\dot{x} \cos\varphi - x\omega \sin\varphi + \dot{\rho})(\rho\omega - \dot{x} \sin\varphi) \\
&\quad + m(x \cos\varphi + \rho)(\dot{\rho}\omega - \ddot{x} \sin\varphi - \dot{x}\omega \cos\varphi) \\
&\quad + m(\dot{x} \sin\varphi + x\omega \cos\varphi)(\dot{x} \cos\varphi + \dot{\rho}) \\
&\quad + m x \sin\varphi (\ddot{x} \cos\varphi - \dot{x}\omega \sin\varphi + \ddot{\rho}) \vec{k} \\
&= m\rho\omega\dot{x} \cos\varphi - m\rho x\omega^2 \sin\varphi + m\rho\omega\dot{\rho} - m\dot{x}^2 \sin\varphi \cos\varphi + m x \dot{x}\omega \sin^2\varphi \\
&\quad - m\dot{x}\dot{\rho} \sin\varphi + m\dot{\rho}\omega x \cos\varphi - m x \ddot{x} \cos\varphi \sin\varphi - m x \dot{x}\omega \cos^2\varphi + m\rho\dot{\rho}\omega \\
&\quad - m\ddot{x}\rho \sin\varphi - m\rho\dot{x}\omega \cos\varphi + m\dot{x}^2 \sin\varphi \cos\varphi + m\dot{\rho}\dot{x} \sin\varphi + m x \dot{x}\omega \cos^2\varphi \\
&\quad + m x \dot{\rho}\omega \cos\varphi + m x \ddot{x} \sin\varphi \cos\varphi - m x \dot{x}\omega \sin^2\varphi + m x \sin\varphi \ddot{\rho} \vec{k} \\
&= m\rho\omega\dot{x} \cos\varphi - m\rho x\omega^2 \sin\varphi + m\rho\omega\dot{\rho} - m\dot{x}^2 \sin\varphi \cos\varphi + m x \dot{x}\omega \sin^2\varphi \\
&\quad - m\dot{x}\dot{\rho} \sin\varphi + m\dot{\rho}\omega x \cos\varphi - m x \ddot{x} \cos\varphi \sin\varphi - m x \dot{x}\omega \cos^2\varphi + m\rho\dot{\rho}\omega \\
&\quad - m\ddot{x}\rho \sin\varphi - m\rho\dot{x}\omega \cos\varphi + m\dot{x}^2 \sin\varphi \cos\varphi + m\dot{\rho}\dot{x} \sin\varphi + m x \dot{x}\omega \cos^2\varphi \\
&\quad + m x \dot{\rho}\omega \cos\varphi + m x \ddot{x} \sin\varphi \cos\varphi - m x \dot{x}\omega \sin^2\varphi + m x \sin\varphi \ddot{\rho} \vec{k} \\
&= (-m\rho x\omega^2 \sin\varphi + 2m\rho\omega\dot{\rho} + 2m\dot{\rho}\omega x \cos\varphi - m\ddot{x}\rho \sin\varphi + m x \sin\varphi \ddot{\rho}) \vec{k}
\end{aligned}$$

2- On détermine les moments de chacune des forces agissant sur le point M .

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_O(\vec{F}) &= \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = [(x \cos\varphi + \rho) \vec{e}_\rho - x \sin\varphi \vec{e}_\varphi] \wedge \ddot{x} m \cos\varphi \vec{e}_\rho \\
&= x \ddot{x} m \cos\varphi \sin\varphi \vec{k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_O(\vec{P}) &= \vec{OM} \wedge \vec{P} = [(x \cos \varphi + \rho) \vec{e}_\rho - x \sin \varphi \vec{e}_\varphi] \wedge [-mg(\sin \varphi \vec{e}_\rho + \cos \varphi \vec{e}_\varphi)] \\
&= [-mg(x \cos \varphi + \rho) \cos \varphi - mg x \sin^2 \varphi] \vec{k} \\
\mathcal{M}_O(\vec{R}) &= \vec{OM} \wedge \vec{R} = [(x \cos \varphi + \rho) \vec{e}_\rho - x \sin \varphi \vec{e}_\varphi] \wedge (\mathbf{R}_\varphi \vec{e}_\varphi + \mathbf{R}_z \vec{k}) \\
&= -(x \cos \varphi + \rho) \mathbf{R}_z \vec{e}_\varphi + (x \cos \varphi + \rho) \mathbf{R}_\varphi \vec{k} - x \sin \varphi \mathbf{R}_z \vec{e}_\rho \\
&= -x \sin \varphi \mathbf{R}_z \vec{e}_\rho - (x \cos \varphi + \rho) \mathbf{R}_z \vec{e}_\varphi + (x \cos \varphi + \rho) \mathbf{R}_\varphi \vec{k}
\end{aligned}$$

3- Les expressions des composantes de $\vec{R}$.

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{\sigma}_O(M/\mathcal{R})}{dt} &= \mathcal{M}_O(\vec{F}) + \mathcal{M}_O(\vec{P}) + \mathcal{M}_O(\vec{R}) \\
&= (-m\rho x \omega^2 \sin \varphi + 2m\rho \omega \dot{\rho} + 2m\dot{\rho} \omega x \cos \varphi - m\ddot{\rho} \sin \varphi + mx \sin \varphi \ddot{\rho}) \vec{k} \\
&= x\ddot{x} m \cos \varphi \sin \varphi \vec{k} + (-mg(x \cos \varphi + \rho) \cos \varphi - mg x \sin^2 \varphi) \vec{k} \\
&\quad - x \sin \varphi \mathbf{R}_z \vec{e}_\rho - (x \cos \varphi + \rho) \mathbf{R}_z \vec{e}_\varphi + (x \cos \varphi + \rho) \mathbf{R}_\varphi \vec{k}
\end{aligned}$$

Par identification, on trouve :

$$\begin{aligned}
mx \sin \varphi \ddot{\rho} - m\rho x \omega^2 \sin \varphi + 2m\rho \omega \dot{\rho} + 2m\dot{\rho} \omega x \cos \varphi - m\ddot{\rho} \sin \varphi \\
&= mx\ddot{x} \cos \varphi \sin \varphi - mg(x \cos \varphi + \rho) \cos \varphi - mg x \sin^2 \varphi + (x \cos \varphi + \rho) \mathbf{R}_\varphi \\
&\quad - mgx \sin \varphi^2 + 2m\rho \omega \dot{\rho} + 2m\dot{\rho} \omega x \cos \varphi - m\ddot{\rho} \sin \varphi \\
&= mx\ddot{x} m \cos \varphi \sin \varphi - mg(x \cos \varphi + \rho) \cos \varphi - mg x \sin^2 \varphi + (x \cos \varphi + \rho) \mathbf{R}_\varphi \\
2m\rho \omega \dot{\rho} + 2m\dot{\rho} \omega x \cos \varphi - m\ddot{\rho} \sin \varphi - mx\ddot{x} m \cos \varphi \sin \varphi + mg(x \cos \varphi + \rho) \cos \varphi \\
&= (x \cos \varphi + \rho) \mathbf{R}_\varphi \\
\mathbf{R}_\varphi &= m(2\dot{\rho} \omega - \ddot{x} \sin \varphi) + mg \cos \varphi \quad \text{et} \quad \mathbf{R}_z = 0
\end{aligned}$$

Partie II : Etude dans le référentiel $\mathcal{R}_1$ (non Galiléen)

1- Le référentiel $\mathcal{R}_1$ n'est pas Galiléen car il n'est pas en translation rectiligne et uniforme par rapport à R.

2- On calcul la vitesse relative $\vec{V}(M/\mathcal{R}_1)$ et la vitesse d'entraînement $\vec{V}_e(M)$

☀ la vitesse relative : $\vec{V}(M/\mathcal{R}_1) = \left. \frac{d\vec{O_1M}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho$

☀ la vitesse d'entraînement :

$$\vec{V}_e(M) = \left(\frac{d\vec{OM}(M \in \mathcal{R}_1)}{dt} \right)_R = \frac{d\vec{OO_1}}{dt} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{O_1M}$$

$$\vec{V}_e(M) = \dot{x} \vec{i} + \omega \vec{k} \wedge \rho \vec{e}_\rho = \dot{x}(\cos \varphi \vec{e}_\rho - \sin \varphi \vec{e}_\varphi) + \omega \rho \vec{e}_\varphi$$

$$\text{Donc } \vec{V}_e(M) = (\dot{x} \cos \varphi) \vec{e}_\rho + (\omega \rho - \dot{x} \sin \varphi) \vec{e}_\varphi$$

3- On calcul l'accélération relative, l'accélération d'entraînement et l'accélération de Coriolis du point **M**.

☀ L'accélération relative :

$$\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_1) = \left(\frac{d^2 \overrightarrow{O_1 M}}{dt^2} \right)_{R_1} = \ddot{\rho} \vec{e}_\rho$$

☀ L'accélération d'entraînement :

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}_e(M) &= \frac{d^2 \overrightarrow{OM}(M \in \mathcal{R}_1)}{dt^2} = \left(\frac{d^2 \overrightarrow{OO_1}}{dt^2} \right)_{/R} + \frac{d}{dt} (\Omega(\mathcal{R}_1/R) \wedge \overrightarrow{O_1 M})_{/R} \\ &= \vec{\gamma}(O_1/R) + \frac{d\Omega(\mathcal{R}_1/R)}{dt} \wedge \overrightarrow{O_1 M} + \Omega(\mathcal{R}_1/R) \wedge (\Omega(\mathcal{R}_1/R) \wedge \overrightarrow{O_1 M}) \\ &= \ddot{x} \vec{i} + \omega \vec{k} \wedge (\omega \vec{k} \wedge \vec{e}_\rho) = \ddot{x} \vec{i} + \omega \vec{k} \wedge \rho \omega \vec{e}_\varphi = \ddot{x} \vec{i} - \rho \omega^2 \vec{e}_\rho \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \vec{\gamma}_e(M) = (\ddot{x} \cos \varphi - \rho \omega^2) \vec{e}_\rho - \ddot{x} \sin \varphi \vec{e}_\varphi$$

☀ L'accélération de Coriolis :

$$\vec{\gamma}_c(M) = 2\Omega(R_1/R) \wedge \vec{V}_r(M) = 2\omega \vec{k} \wedge \dot{\rho} \vec{e}_\rho \Rightarrow \vec{\gamma}_c(M) = 2\omega \dot{\rho} \vec{e}_\varphi$$

4- vérifions les lois de composition des vitesses et des accélérations.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \vec{V}_r(M) + \vec{V}_e(M) &= \dot{\rho} \vec{e}_\rho + (\dot{x} \cos \varphi) \vec{e}_\rho + (\omega \rho - \dot{x} \sin \varphi) \vec{e}_\varphi \\ &= (\dot{x} \cos \varphi + \dot{\rho}) \vec{e}_\rho + (\omega \rho - \dot{x} \sin \varphi) \vec{e}_\varphi = \vec{V}(M/R) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}_r(M) + \vec{\gamma}_e(M) + \vec{\gamma}_c(M) &= \ddot{\rho} \vec{e}_\rho + (\ddot{x} \cos \varphi - \rho \omega^2) \vec{e}_\rho - \ddot{x} \sin \varphi \vec{e}_\varphi + 2\omega \dot{\rho} \vec{e}_\varphi \\ &= (\ddot{x} \cos \varphi + \ddot{\rho} - \rho \omega^2) \vec{e}_\rho + (2\omega \dot{\rho} - \ddot{x} \sin \varphi) \vec{e}_\varphi = \vec{\gamma}(M/R) \end{aligned}$$

Les lois de composition du mouvement sont bien vérifiées

5- L'expression des forces appliquées à M dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$

☀ le poids : $\vec{P} = -mg \vec{j} = -mg(\sin \varphi \vec{e}_\rho + \cos \varphi \vec{e}_\varphi)$

☀ la réaction: $\vec{R} = R_\varphi \vec{e}_\varphi + R_z \vec{k}$

☀ La force : $\vec{F} = \ddot{x} m \cos \varphi \vec{e}_\rho$

☀ Les forces d'inertie :

• Force d'inertie d'entraînement :

$$\vec{F}_{ie} = -m \vec{\gamma}_e(M) = -m(\ddot{x} \cos \varphi - \rho \omega^2) \vec{e}_\rho + m \ddot{x} \sin \varphi \vec{e}_\varphi$$

☀ Force d'inertie de Coriolis :

$$\vec{F}_{ic} = -m \vec{\gamma}_c(M) = -2m\omega \dot{\rho} \vec{e}_\varphi$$

6- Le principe fondamentale de la dynamique (PFD) dans le référentiel non galiléen :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} = m\vec{Y}_r(M)$$

$$-mg(\sin\varphi \vec{e}_\rho + \cos\varphi \vec{e}_\varphi) + \mathbf{R}_\varphi \vec{e}_\varphi + \mathbf{R}_z \vec{k} + \ddot{x} m \cos\varphi \vec{e}_\rho - m(\ddot{x} \cos\varphi - \rho\omega^2) \vec{e}_\rho + m\ddot{x} \sin\varphi \vec{e}_\varphi - 2m\omega\dot{\rho}\vec{e}_\varphi = m\ddot{\rho}\vec{e}_\rho$$

$$-mg\sin\varphi \vec{e}_\rho - mg\cos\varphi \vec{e}_\varphi + \mathbf{R}_\varphi \vec{e}_\varphi + \mathbf{R}_z \vec{k} + \ddot{x} m \cos\varphi \vec{e}_\rho - m(\ddot{x} \cos\varphi - \rho\omega^2) \vec{e}_\rho + m\ddot{x} \sin\varphi \vec{e}_\varphi - 2m\omega\dot{\rho}\vec{e}_\varphi = m\ddot{\rho}\vec{e}_\rho$$

$$[-mg\sin\varphi - m(\ddot{x} \cos\varphi - \rho\omega^2) + \ddot{x} m \cos\varphi] \vec{e}_\rho + [-mg\cos\varphi + m\ddot{x} \sin\varphi - 2m\omega\dot{\rho} + \mathbf{R}_\varphi] \vec{e}_\varphi + \mathbf{R}_z \vec{k} = m\ddot{\rho}\vec{e}_\rho$$

7- L'équation différentielle du mouvement.

La projection du PFD suivant $\vec{e}_\rho$:

$$[-mg\sin\varphi - m(\ddot{x} \cos\varphi - \rho\omega^2) + \ddot{x} m \cos\varphi] = m\ddot{\rho}$$

Ce qui donne :

$$\Rightarrow \ddot{\rho} - \omega^2 \rho = -g\sin\varphi$$

C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants et avec second membre. L'équation caractéristique est : $r^2 - \omega^2 = 0$

$$\Rightarrow r_{1,2} = \mp\omega$$

La solution s'écrit sous la forme : $\rho(t) = \rho_g(t) + \rho_p(t)$

Avec :

$$\rho_g(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$$

$$\rho_p(t) = C\sin\varphi + D\cos\varphi$$

$\rho_p(t)$ Doit vérifier l'équation différentielle

$$\ddot{\rho}_p(t) = -C\omega^2\sin\varphi - D\omega^2\cos\varphi$$

On écrit donc :

$$-C\omega^2\sin\varphi - D\omega^2\cos\varphi - C\omega^2\sin\varphi - D\omega^2\cos\varphi = -g\sin\varphi$$

$$\Rightarrow -2C\omega^2\sin\varphi - 2D\omega^2\cos\varphi = -g\sin\varphi$$

$$\Rightarrow -2C\omega^2 = -g \text{ et } -2D\omega^2 = 0$$

$$\Rightarrow C = \frac{g}{2\omega^2} \text{ et } D = 0$$

Donc : $\rho_p(t) = \frac{g}{2\omega^2} \sin\varphi$

Par conséquent :

$$\rho(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2} \sin\varphi$$

A et B sont déterminées à partir des conditions initiales $\rho(0) = 0 \Rightarrow A+B = 0$ et $\dot{\rho}(0) = v_0 = \omega^2 A - B\omega^2 \Rightarrow A = \frac{v_0}{2\omega^2}$ et $B = -\frac{v_0}{2\omega^2}$.

La solution est $\rho(t) = \frac{v_0}{2\sqrt{2}\omega} e^{-\omega t} \sinh(\sqrt{2}\omega t)$

$$\rho(t) = \frac{v_0}{2\omega^2} e^{\omega t} - \frac{v_0}{2\omega^2} e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2} \sin\varphi = \frac{v_0}{\omega^2} \sinh\omega t + \frac{g}{2\omega^2} \sin\varphi$$

8- Les expressions de composantes de la réaction.

☀ La projection du PFD suivant $\vec{e}_\varphi : \Rightarrow \mathbf{R}_\varphi = m(2\dot{\rho}\omega + g\cos\varphi - \ddot{x} \sin\varphi)$

☀ La projection du PFD suivant $\vec{k} : \Rightarrow \mathbf{R}_z = 0$

9- Pour que le contact entre M et (T) existe, il faut que :

$$R_\varphi \geq 0$$

$$\Rightarrow \text{d'après 4 - b): } \dot{\rho} \geq \frac{a \sin\varphi - g\cos\varphi}{2\omega} = \dot{\rho}_{\min} = \vec{V}_{\min}(M/R_1)$$