El mokhtar El Ouardi

Travaux dirigées de Mécanique du point matériel
ANALYSE DIMENSIONNELLE

Exercice N°1 :

La masse volumique **ρ** d'un cylindre de masse **m**, de rayon **R** et de longueur **l** est donnée par la relation suivante : $\rho = \dfrac{m^x}{\pi l^y R^2}$

1- En utilisant les dimensions, trouver les deux constantes ***x*** et ***y.***
2- En déduire l'expression exacte de la masse volumique ***ρ***.

Correction de l'exercice N°1 :

La masse volumique est par définition le rapport entre la masse et le volume c'est-à-dire elle admet comme dimension :

$$[\rho] = \frac{[m]^x}{1[l]^y[R]^2} \qquad \text{avec} \quad [\rho] = \frac{[m]^x}{[l]^y[R]^2} = M^x L^{-y-2}$$

Donc x = 1 et -y – 2 = - 3 donc y = 1

2- $\rho = \dfrac{m}{\pi l R^2}$

Exercice N°2

Les formules suivantes sont-elles valides dimensionnellement !? Faire une analyse dimensionnelle pour confirmer ou rectifier.

1- $F = \dfrac{Gm}{r}$, tels que : F est une force, G une constante exprimé en $\dfrac{m^3}{kg.s^{-1}}$, m est une unité de masse et r une unité de longueur.

2- p = g.h_1 + h_2 .F tels que : P : une pression, g : l'accélération de la pesanteur, h_1 et h_2 : hauteurs, F : une force.

3- $\theta = \dfrac{b.\sin(a)}{t.\cos(c)}$, tels que : b, t des dimensions de longueur.

Correction de l'exercice N°2:

1- $F = \dfrac{Gm}{r}$ L'équation peut-être écrite sous la forme dimensionnelle suivante :

$$[F]^\alpha.[G]^\beta.[m]^\gamma.[r]^\theta = 1 \qquad (1)$$

Tels que : $[F] = M.L.T^{-2}$; $[G] = L^3.\mathrm{M}^{-1}.T^{-1}$; $[m] = M$ *et* $[r] = L$

Remplaçons les dimensions des paramètres de l'équation (1) par ses expressions dimensionnelle de bas, on obtient : $\left[M.L.T^{-2}\right]^\alpha.\left[L^3.\mathrm{M}^{-1}.T^{-1}\right]^\beta.[M]^\gamma.[L]^\theta = 1$ **Soit :** $L^{\alpha+3\beta+\theta}.\mathrm{M}^{\alpha-2\beta+\gamma}.T^{-2\alpha-2\beta} = 1$

Cette équation est impossible physiquement, car on ne peut pas trouver une relation entre les dimensions de base. Mais mathématiquement, cette équation est valide si est seulement si les exposants des paramètres de base sont nuls. C'est-à-dire :

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta + \theta = 0 \\ \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ -2\alpha - 2\beta = 0 \end{cases}$$

Qui a pour solution :

$$\begin{cases} -2\alpha-2\beta=0 \Rightarrow \alpha=-\beta \\ \alpha-\beta+\gamma=0 \ \Rightarrow \gamma=2\beta \\ \alpha+3\beta+\theta=0 \Rightarrow \theta=-2\beta \end{cases}$$

Remplaçons ces valeurs en fonction de β en (1) , on obtient : $[F]^{-\beta}.[G]^{\beta}.[m]^{2\beta}.[r]^{-2\beta}=1$

Et si on pose β = 1 : $[F]^{-1}.[G]^{1}.[m]^{2}.[r]^{-2}=1$ Qui est équivalente à $[F]=[G].\frac{[m]^2}{[r]^2}$

En comparaison avec l'équation (1), cette dernière peut être représentée physiquement sous la forme :

$F=k.G.\frac{m^2}{r^2}$, tel que k : une constante sans dimension.

Alors, dans (1) il manque un paramètre $\frac{r}{m}$ pour que l'équation soit correcte dimensionnellement.

2- p = g.h_1 + h_2 .F

Cette équation peut-être présenté sous cette forme : $p=\alpha g h_1+\beta h_2 F$.

Pour vérifier validité de l'équation, on analyse ses dimensions terme par terme, c'est-à-dire, représenter l'équation sous la forme :

$$\begin{cases} [p]=[\alpha][g][h_1] \\ [p]=[\beta][h_2][F] \end{cases}$$

Puisque $[p]=M.L^{-1}.T^{-2}$; $[g]=LT^{-2}$ *et* $[h_1]=L$ donc $[\alpha]=ML^{-3}$ qui est la dimension de la masse volumique.

Puisque $[p]=M.L^{-1}.T^{-2}$; $[h_2]=L$ *et* $[F]=M.L.T^{-2}$ donc $[\beta]=L^{-3}$.

L'équation du premier terme doit être multipliée par la masse volumique (ρ), par contre le deuxième terme doit être multiplié par un paramètre qui a la dimension 1/L^3

3- $\theta=\frac{b.\sin(a)}{t.\cos(c)}$ Les termes sin(a) et cos(b) sont des termes sont dimensions, car :

$[\sin(a)]=[\cos(c)]=L/L$, alors : $[\theta]=\frac{[b].[\sin(a)]}{[t].[\cos(c)]}=\frac{L}{L}=1$ et l'équation est correcte

Exercice N°3

On note [X] la dimension physique de la grandeur X. On l'exprime dans la base L, M, T, I, θ (longueur, masse, temps, intensité et température). Ainsi, pour une vitesse v : $[v] = L{:}T^{-1}$.

1) Quelles sont les unités dans le système international des grandeurs de la base L, M, T, I, θ ? Donner la dimension et l'unité : d'une force, d'une puissance, d'une pression, d'une charge électrique.

2) Montrer que les unités suivantes correspondent à une seule dimension : N.m, kWh, e.V, $g{:}cm^2.s^{-2}$. Par quels facteurs numériques passe-t-on de l'un à l'autre ?

3) Quelle est la dimension d'un angle α ? Pourquoi dit-on que l'unité naturelle d'un angle est le radian ? Comparer la dimension et l'unité d'une fréquence ν et de la pulsation associée ω 2πν.

4) A l'aide d'arguments dimensionnels, discuter de la validité des égalités suivantes et proposer une écriture correcte :

– $x = (l^2 - d)/d$, où les trois grandeurs sont des distances.

– $x = x_0 \exp(-t\,/\tau)$, où t et τ sont des temps.

– $E = \frac{mv^2}{2} - \frac{F}{l}$, où E est une énergie, v une vitesse, m une masse et l une longueur et F une force.

– $v = \frac{g}{l} cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$, où l est une longueur, g l'accélération de la pesanteur et ω une pulsation.

Correction de l'exercice N°3

1) Unité de L : m (mètre) ; unité de M : kg (kilogramme) ; unité de T : s (seconde) ; unité de I : A (ampère); unité de θ : K (Kelvin).

- [force] = [masse] × [accélération] = $M . L . T^{-2}$
- [puissance] = [énergie] × $[\text{temps}]^{-1}$ = [masse] × $[\text{vitesse}]^2$ $[\text{temps}]^{-1}$ = $M.L^2T^{-2}\ T = M.L^2\ T^{-3}$
- [pression] = [force]/[surface] = $M\ L\ T^{-2}\ L^{-2} = M\ L^{-1}\ T^{-2}$
- [charge] = [intensité] × [temps] = I T.

2)

- [N.m] = [force] × [longueur] = $(M\ L\ T^{-2})\ L = M\ L^2\ T^{-2}$.
- [kWh] = [puissance] × [temps] = $(M\ L^2\ T^{-3})\ T = M\ L^2\ T^{-2}$.
- $[e.V] = [\text{charge}]\,[\text{tension}] = [\text{charge}].\overbrace{[\text{tension} \times \text{intensité}]}^{puissance}\,[\text{intensité}]^{-1} =$ $[\text{charge}][\text{puissance}][\text{intensité}]^{-1} = (I.T).(M.L^2.T^{-3}).T = M.L^2.T^{-2}$
- $[g.cm^2.s^{-2}]$ = [masse] $[\text{longueur}]^2$ $[\text{temps}]^2$ = $M\ L^2\ T^{-2}$.
- 1 N.m = 1 kg $m^2\ s^{-2}$
- 1 kWh = 10^3 3600 W.s = 3,6 10^6 kg $m^2\ s^{-2}$
- 1 eV = 1,6 10^{-19} C.V = 1,6 10^{-19} kg $m^2\ s^{-2}$
- 1 g.cm² s^{-2} = $10^{-3} \times 10^{-4}$ kg $m^2\ s^{-2}$ = 10^{-7} kg $m^2\ s^{-2}$

3)

L'angle α est le rapport entre la longueur de l'arc de cercle correspondant à l'angle α, et su rayon du cercle. Donc : $[\alpha] = \frac{L}{L} =$

Un angle n'a donc pas de dimension. Le rapport entre la longueur de l'arc et le rayon n'a donc pas d'unité.

Cependant, si la longueur de l'arc est égale au rayon, on appelle cet angle un radian. Si ce rapport vaut, par exemple 1/2, l'angle est deux fois plus petit qu'un radian, on dit donc que l'angle vaut 0,5 radian.

En conclusion, en faisant le rapport, on obtient directement le nombre d'angle "un radian" contenu dans cet angle.

$[\omega] = [2\pi\nu] = [\pi][\nu]$. π étant la valeur d'un angle (en radian), π n'a pas de dimension. Donc : [ω] = [ν].

L'unité de ω est l'untié de ν multipliée par l'unité de π.

4)

- $x = (l^2 - d)/d$ est faux car on ne peut pas ajouter une grandeur ayant des dimensions différentes ($[l^2] = L$ et $[d] = L$). Une écriture correcte serait plutôt : $x = (l^2 - d^2)/d$ (le membre de droite a alors la même dimension que le membre de gauche).
- $x = x_0 \exp(-t/\tau)$ est possible : l'argument de l'exponentielle est bien sans dimension, et le membre de gauche a la même dimension que le membre de droite.
- $E = \frac{mv^2}{2} - \frac{F}{l}$ est faux car $\left[\frac{mv^2}{2}\right] = M.L.T^{-2}$ et $\left[\frac{F}{l}\right] = M.T^{-2}$. Une écriture correcte serait plutôt : $E = \frac{mv^2}{2} - F.l$. Tous les termes ont alors la dimension d'une énergie.
- $v = \frac{g}{l} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$ est faux : on ajoute au temps une grandeur que n'a pas la dimension d'un temps, et la dimension du membre de droite n'est pas la même que celle du membre de gauche. Une écriture correcte serait par exemple : $v = \sqrt{g.l} \times \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$,

Exercice N°4

Dans un fluide, une bille de rayon r animée d'une vitesse v est soumise à une force de frottement donnée par $F = -6\pi\eta r v$, où η est la viscosité du fluide.
1) Quelle est la dimension de η ?
2) Lorsque la bille est lâchée sans vitesse initiale à l'instant t = 0, sa vitesse s'écrit pour t > 0 : $v = a(1 - \exp(-\frac{t}{b})$ où a et b sont deux grandeurs qui dépendent des caractéristiques du fluide. Quelles sont les dimensions de a et b ?
3) Si ρ désigne la masse volumique du fluide, trouver une combinaison simple $Re = \rho^\alpha v^\beta r^\gamma \eta^\delta$ qui soit sans dimension (parmi les différents choix possibles on prendra α = 1). On obtient ainsi le nombre de Reynolds qui permet de caractériser le régime d'écoulement d'un fluide (laminaire ou turbulent).

Correction de l'exercice N°4

1)

$$F = -6\pi\eta r v \implies \eta = \frac{F}{6\pi r v} \implies [\eta] = \frac{[F]}{[r][v]} = \frac{[masse][accéleration]}{[r][v]} = \frac{M.(L.T^{-2})}{L.(L.T^{-1})}$$
$$= M.L^{-1}.T^{-1}$$

2) L'argument de l'exponentielle est sans dimension donc [b] = T. Le membre de droite à la dimension d'une vitesse donc [a] = L.T^{-1}.
3)

$$Re = \rho^\alpha v^\beta r^\gamma \eta^\delta \implies [Re] = [\rho]^\alpha [v]^\beta [r]^\gamma [\eta]^\delta = (M.L^{-3})^\alpha (L.T^{-1})^\beta L^\gamma (M.L^{-1}T^{-1})^\delta$$
$$\implies [Re] = M^{\alpha+\delta}.L^{-3\alpha+\beta+\gamma-\delta}.\ T^{-\beta-\delta}$$

Re étant sans dimension (d'après l'énoncé), en prenant α = 1, on en déduit :

$$\begin{cases} 1 + \delta = 0 \\ -3 + \beta + \gamma - \delta = 0 \\ -\beta - \delta = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \delta = -1 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 1 \end{cases}$$

En conclusion : $Re = \frac{\rho v r}{\eta}$