

Exercices de calcul des incertitudes

Exercice 1

Pour mesurer l'épaisseur d'un cylindre creux on mesure les diamètres intérieur D_1 et extérieur D_2 et on trouve :

$$D_1 = (19,5 \pm 0,1) \text{ mm} , \quad D_2 = (26,7 \pm 0,1) \text{ mm}$$

Donner le résultat de la mesure et sa précision.

Exercice 2

Soit à déterminer la masse volumique (ρ) de la substance d'un cube homogène à partir de la mesure de sa masse (m) et de son arête (a). Calculer l'incertitude absolue et l'incertitude relative et écrire le résultat de la mesure.

Exercice 3

La densité (δ) d'un corps solide par application du théorème d'Archimède est :

$$\delta = \frac{m_2 - m_1}{m_3 - m_1}$$

Où m_1, m_2, m_3 sont les résultats de trois mesures de masses effectuées, successivement, avec la même balance. Trouver l'incertitude relative sur δ .

Exercice 4

Calculer l'incertitude relative sur la mesure de la capacité (C) d'un condensateur équivalent à deux condensateurs montés :

a/ en parallèle b/ en série , et cela en fonction des précisions sur (C_1) et (C_2).

Exercice 5

Soit l'expression : $\alpha = \frac{m_2(\theta_2 - \theta_m)}{\theta_m - \theta_1} - m_1$

Calculer l'incertitude absolue sur α en fonction des incertitudes absolues $\Delta\theta_m, \Delta\theta_2, \Delta\theta_1, \Delta m_2, \Delta m_1$.

Exercice 6

Soit la relation : $y = y_0 e^{-\omega t}$.

Calculer l'incertitude absolue sur y en fonctions des incertitudes absolues $\Delta\omega, \Delta t, \Delta y_0$.

Corrigés des exercices

Exercice 1:

Calculons d'abord l'épaisseur du cylindre : $e = \frac{D_2 - D_1}{2}$; $e = 3,6 \text{ mm}$

L'incertitude absolue sur l'épaisseur est donc : $\Delta e = \frac{\Delta D_2 + \Delta D_1}{2}$; $\Delta e = \pm 0,1 \text{ mm}$

Ecrivons le résultat de la mesure : $e = (3,6 \pm 0,1) \text{ mm}$

Nous en déduisons l'incertitude relative : $\frac{\Delta e}{e} = \frac{0,1}{3,6} \Rightarrow \frac{\Delta e}{e} = 0,03 = 3 \%$

Exercice 2:

Calcul de la masse volumique : $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{a^3}$ AN $\rho = 3,41 \text{ g/cm}^3$

Nous déduisons l'incertitude absolue de l'incertitude relative :

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\Delta m}{m} + 3 \frac{\Delta a}{a} \Rightarrow \Delta \rho = \rho \left(\frac{\Delta m}{m} + 3 \frac{\Delta a}{a} \right) \quad \text{AN} \quad \Delta \rho = 0,02 \text{ g/cm}^3$$

D'où l'incertitude relative : $\frac{\Delta \rho}{\rho} = 0,0063 = 6,3 \text{ ‰}$

Ecriture du résultat de la mesure : $\rho = (3,41 \pm 0,02) \text{ g/cm}^3$

Remarque importante :

Le nombre des chiffres significatifs conservés dans un résultat ne doit jamais impliquer une précision supérieure à celle des données.

Un calcul ne peut qu'aboutir à un résultat dont l'incertitude sera au moins égale à celle de la donnée la moins précise.

Exercice 3 :

Nous avons l'expression : $\delta = \frac{m_2 - m_1}{m_3 - m_1}$

Remarquons que les trois masses sont dépendantes.

Appliquons la fonction logarithmique aux deux membres de l'équation :

$$\log \delta = \log \frac{m_2 - m_1}{m_3 - m_1} = \log(m_2 - m_1) - \log(m_3 - m_1)$$

Passons à la différentielle logarithmique :

$$\frac{d\delta}{\delta} = \frac{d(m_2 - m_1)}{m_2 - m_1} - \frac{d(m_3 - m_1)}{m_3 - m_1}$$

Développons : $\frac{d\delta}{\delta} = \frac{dm_2}{m_2 - m_1} - \frac{dm_1}{m_2 - m_1} - \frac{dm_3}{m_3 - m_1} + \frac{dm_1}{m_3 - m_1}$

Factorisons : $\frac{d\delta}{\delta} = dm_1 \left(\frac{1}{m_3 - m_1} - \frac{1}{m_2 - m_1} \right) + \frac{dm_2}{m_2 - m_1} - \frac{dm_3}{m_3 - m_1}$

Passons à présent aux incertitudes relatives, en remplaçant di par Δi et en changeant le signe (-) des facteurs communs par le signe (+), et en supposant $\Delta m_1 = \Delta m_2 = \Delta m_3$ (puisque nous utilisons la même balance). Il vient :

$$\frac{\Delta \delta}{\delta} = \Delta m_1 \left(\frac{1}{m_3 - m_1} - \frac{1}{m_2 - m_1} \right) + \frac{\Delta m_2}{m_2 - m_1} - \frac{\Delta m_3}{m_3 - m_1}$$

Nous obtenons à la fin :

$$\frac{\Delta \delta}{\delta} = \frac{2\Delta m}{m_3 - m_1}$$

Exercice 4 :

a/ Groupement en parallèle :

La capacité du condensateur équivalent à deux condensateurs montés en parallèle est donnée par la formule : $C = C_1 + C_2$.

Appliquons la fonction logarithmique aux deux membres de l'équation puis passons à la différentielle logarithmique :

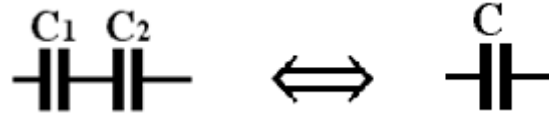
$$\log C = \log(C_1 + C_2)$$

L'incertitude relative est donc :

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta C_1}{C_1 + C_2} + \frac{\Delta C_2}{C_1 + C_2} \Leftrightarrow \frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta C_1}{C_1} \left(\frac{C_1}{C_1 + C_2} \right) + \frac{\Delta C_2}{C_2} \left(\frac{C_2}{C_1 + C_2} \right)$$

b/ Groupement en série :

La capacité du condensateur équivalent à deux condensateurs montés en série est donnée par la formule :



$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

Appliquons la fonction logarithmique aux deux membres de l'équation puis passons à la différentielle logarithmique :

$$\log C = \log \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \Rightarrow \log C = \log C_1 + \log C_2 - \log(C_1 + C_2)$$

L'incertitude relative est donc :

$$\frac{dC}{C} = \frac{dC_1}{C_1} + \frac{dC_2}{C_2} - \frac{dC_1}{C_1 + C_2} - \frac{dC_2}{C_1 + C_2}$$

Factorisons :

$$\frac{dC}{C} = dC_1 \left(\frac{1}{C_1} - \frac{1}{C_1 + C_2} \right) + dC_2 \left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1 + C_2} \right)$$

L'expression précédente peut être écrite sous la forme :

$$\frac{dC}{C} = \frac{dC_1}{C_1} \left(1 - \frac{C_1}{C_1 + C_2} \right) + \frac{dC_2}{C_2} \left(1 - \frac{C_2}{C_1 + C_2} \right)$$

Finalement l'incertitude relative demandée est :

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta C_1}{C_1} \left| 1 - \frac{C_1}{C_1 + C_2} \right| + \frac{\Delta C_2}{C_2} \left| 1 - \frac{C_2}{C_1 + C_2} \right|$$

Exercice 5 :

Ecrivons l'expression donnée sous la forme :

$$\alpha + m_1 = \frac{m_2(\theta_2 - \theta_m)}{\theta_m - \theta_1}$$

En introduisant la fonction logarithmique dans les deux membres de l'équation nous obtenons :

$$\log(\alpha + m_1) = \log m_2 + \log(\theta_2 - \theta_m) - \log(\theta_m - \theta_1)$$

La différentielle logarithmique de l'expression précédente est :

$$\frac{d(\alpha + m_1)}{(\alpha + m_1)} = \frac{dm_2}{m_2} + \frac{d\theta_2}{\theta_2 - \theta_m} - \frac{d\theta_m}{\theta_2 - \theta_m} - \frac{d\theta_m}{\theta_m - \theta_1} + \frac{d\theta_1}{\theta_m - \theta_1}$$

Ou bien :

$$\frac{d\alpha}{(\alpha + m_1)} = -\frac{dm_1}{\alpha + m_1} + \frac{dm_2}{m_2} + \frac{d\theta_2}{\theta_2 - \theta_m} - \frac{d\theta_m}{\theta_2 - \theta_m} - \frac{d\theta_m}{\theta_m - \theta_1} + \frac{d\theta_1}{\theta_m - \theta_1}$$

C'est-à-dire :

$$d\alpha = -dm_1 \frac{\alpha + m_1}{\alpha + m_1} + dm_2 \frac{\alpha + m_1}{m_2} + d\theta_2 \frac{\alpha + m_1}{\theta_2 - \theta_m} - d\theta_m \frac{\alpha + m_1}{\theta_2 - \theta_m} - d\theta_m \frac{\alpha + m_1}{\theta_m - \theta_1} + d\theta_1 \frac{\alpha + m_1}{\theta_m - \theta_1}$$

Et en fin, l'incertitude absolue demandée est :

$$\Delta\alpha = \Delta m_1 + \Delta m_2 \left(\frac{\alpha + m_1}{m_2} \right) + \Delta\theta_2 \left(\frac{\alpha + m_1}{\theta_2 - \theta_m} \right) + \Delta\theta_m \left(\frac{\alpha + m_1}{\theta_2 - \theta_m} + \frac{\alpha + m_1}{\theta_m - \theta_1} \right) + \Delta\theta_1 \left(\frac{\alpha + m_1}{\theta_m - \theta_1} \right)$$

Exercice 6 :

Après introduction de la fonction logarithmique dans les deux membres de l'équation nous obtenons : $\log y = \log y_0 + \log e^{-\omega t}$

Sa différentielle est :

$$\log y = \log y_0 + \log e^{-\omega t} \Rightarrow \log y = \log y_0 - \omega t$$

$$d(\log y) = d(\log y_0) - d(\omega t)$$

Posons $X = \omega t \Rightarrow \frac{dX}{X} = \frac{d\omega}{\omega} + \frac{dt}{t} \Rightarrow dX = X \left(\frac{d\omega}{\omega} + \frac{dt}{t} \right)$

D'où

$$\frac{dy}{y} = \frac{dy_0}{y_0} - \omega t \left(\frac{d\omega}{\omega} + \frac{dt}{t} \right)$$

On passe à l'incertitude relative pour en déduire l'incertitude absolue :

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta y_0}{y_0} + \omega t \left(\frac{\Delta \omega}{\omega} + \frac{\Delta t}{t} \right) \Rightarrow \Delta y = y \left[\frac{\Delta y_0}{y_0} + \omega t \left(\frac{\Delta \omega}{\omega} + \frac{\Delta t}{t} \right) \right]$$