

TD de mécanique du point matériel

Série N°2 : Cinématique et changement de référentiel

Exercice N°1

On considère un point matériel M se déplaçant dans le plan (Oxy) et $R(O, x, y, z)$ est un référentiel muni de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les coordonnées du point M dans R sont données par :

$$x(t) = t + 1 \quad ; \quad y(t) = t^2 + 1 \quad \text{et} \quad z(t) = 0, \quad (t \text{ étant le temps})$$

- 1- Donner l'équation de la trajectoire de M dans R . En déduire sa nature ;
- 2- Calculer la vitesse $\vec{V}(M/R)$ et l'accélération $\vec{\gamma}(M/R)$ du point M .
- 3- Déterminer les vecteurs unitaires $\vec{\tau}$ tangent à la trajectoire, La normale $\vec{n}$ et la binormale $\vec{b}$ de la base de Frenet,
- 4- En Déduire le rayon de courbure ρ .

Exercice N°2

On considère une courbe (C) sur laquelle se déplace un point matériel M d'abscisse curviligne $s(t)$. Le vecteur vitesse du point M dans un repère orthonormé direct $R(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est $\vec{V}(M/R)$ de module V . On définit la base locale (ou base de Frenet) $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$ telle que $\vec{V}(M/R) = V\vec{\tau}$.

- 1- Que désignent les vecteurs $\vec{\tau}$, $\vec{n}$ et $\vec{b}$?
- 2- Quelle relation existe - t -il entre $s(t)$ et V ?
- 3- Montrer que le vecteur accélération du point M dans le repère $\mathcal{R}$ est donné par : $\vec{\gamma}(M) = \frac{dV}{dt} \vec{\tau} + \frac{V^2}{R_c} \vec{n}$
 R_c étant le rayon de courbure de la trajectoire (C) au point M .
- 4- Exprimer R_c en fonction de $\vec{V}(M/R)$ et $\vec{\gamma}(M)$.

Exercice N°3

Dans le plan xOy , une droite Ox' tourne autour de Oz avec une vitesse angulaire constante. Un mobile M se déplace sur la droite Ox' suivant la loi : $r = a \sin \theta$ avec $\theta = \omega t$ et $a = cte$.

1. Déterminer à l'instant t en fonction de a et ω , la vitesse relative et la vitesse d'entraînement de M par leurs projections dans le repère mobile $x'Oy'$. En déduire la vitesse absolue exprimée dans cette même base de projection, et montrer que le module de celle-ci est constant.
2. Déterminer à l'instant t en fonction de a et ω , l'accélération relative, l'accélération d'entraînement et l'accélération complémentaire de M par leurs projections dans le repère mobile $x'Oy'$. En déduire l'accélération absolue exprimée dans cette même base de projection, et montrer que le module de celle-ci est constant.

Exercice N°4

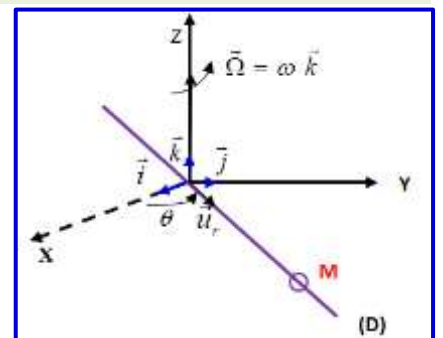
Un anneau de faibles dimensions, assimilable à un point matériel M de masse m , glisse sans frottement sur une tige rigide (D) la tige (d) tourne autour de l'axe (Oz) avec la vitesse angulaire $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, ou θ représente un angle orienté $(\vec{i}, \vec{u}_r)$ et $\vec{u}_r$ est un vecteur unitaire de (D) (Voir figure).

Le mouvement du point M sur la droite (D) est décrit par l'équation horaire :

$$r = r_0(1 + \sin \omega t), \text{ ou } r_0 \text{ est constante positive et } \vec{r} = \overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r.$$

On appelle mouvement relatif de M son mouvement sur la droite (D) , et mouvement absolu son mouvement par rapport au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Déterminer pour M , dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.

- 1- La vitesse et l'accélération relatives.
- 2- La vitesse et l'accélération d'entraînement.
- 3- L'accélération de Coriolis.



Exercice N°5

Dans le plan OXY , un cercle de rayon R , de diamètre OA , tourne à la vitesse angulaire constante ω autour du point O . On lie à son centre mobile O' deux axes rectangulaires $O'X'Y'$ (l'axe $O'X'$ est dirigé suivant OA).

A l'instant $t = 0$, A est sur OX , OX et OX' étant colinéaires.

Un point M , initialement en A , parcourt la circonférence dans le sens positif avec la même vitesse angulaire ω .

1- Calculer directement les composantes des vecteurs vitesse et accélération de $\mathbf{M}$ dans le repère $\mathbf{OXY}$ (en dérivant les composantes de $\overrightarrow{\mathbf{OM}}$).

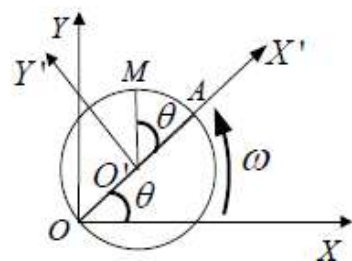
2- Calculer les composantes de la vitesse et de l'accélération relatives de $\mathbf{M}$ dans le repère $\mathbf{O'X'Y'}$ puis dans $\mathbf{OXY}$.

3-

3- 1- Calculer les composantes de la vitesse d'entraînement dans le repère $\mathbf{OXY}$ par la loi de composition des vitesses.

3- 2- Calculer de même les composantes de l'accélération d'entraînement dans le repère $\mathbf{OXY}$; en déduire l'accélération complémentaire (Coriolis).

4- Vérifier les expressions des composantes de la vitesse d'entraînement et celle de l'accélération complémentaire en utilisant les expressions faisant intervenir le vecteur rotation $\vec{\omega}$.



Exercice N°6

Une mouche M parcourt l'aiguille des secondes d'une horloge avec une accélération constante γ_0 et, à l'instant $t = 0$, elle est au centre O de l'horloge avec une vitesse nulle, alors que l'aiguille indique « 0 seconde ».

R est le référentiel terrestre (ou le référentiel du mur de l'horloge). Il est défini par (O, x, y, z) , repère fixe de R . R' est le référentiel lié à l'aiguille des secondes OX . À $t = 0$, OX coïncide avec Oy .

On utilisera les coordonnées polaires de M , (ρ, θ) , et pour exprimer les différents vecteurs, la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$.

1- Mouvement de M dans R'

1- 1- Déterminer le vecteur vitesse de M : $\vec{V}(M/R')$.

1- 2- Déterminer l'équation horaire $\rho(t)$ du mouvement de M .

1- 3- La mouche atteint l'extrémité de l'aiguille qui mesure 20 cm en 60 s. Quelle est la valeur de γ_0 ?

2- Mouvement de M dans R

2-1- Donner l'équation de la trajectoire en coordonnées polaires.

2-2- Donner l'expression du vecteur vitesse de M , $\vec{V}(M/R)$, en utilisant la loi de composition des vitesses.

2- 3- Donner l'expression de son vecteur accélération $\vec{\gamma}(M/R)$ en utilisant la loi de composition des accélérations.

Exercice N°7

Un manège de chevaux de bois tourne à la vitesse angulaire constante $\vec{\omega}_0 = \omega_0 \vec{u}_z$. Pour aider un enfant en difficulté sur un cheval de bois représenté par le point C , le patron (point P) du manège part du centre O et se dirige vers C d'un mouvement d'accélération constante γ_0 (Voir figure).

Notation : R_t référentiel terrestre, $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ repère fixe dans R_t et R_m référentiel lié au manège.

Origine des dates : à $t = 0$. P est en O et part avec une vitesse nulle ; OC coïncide avec l'axe Ox .

On utilisera les coordonnées polaires (ρ, θ) pour repérer P ainsi que la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ pour exprimer les différents vecteurs.

On prendra : $\gamma = 1 \text{ m.s}^{-2}$ $\omega = 15 \text{ tours/min}$ $OC = \rho_0 = 2 \text{ m}$

1- Étude dans le référentiel R_m

1- 1- Quelle est la nature du mouvement de P ?

1- 2- Déterminer le vecteur vitesse de P : $\vec{V}(P/R_m)$.

1- 3- Déterminer l'équation horaire du mouvement de P : $\rho(t)$.

1- 4- Temps mis pour atteindre C .

2- Mouvement du référentiel R_m par rapport au référentiel R_t

2- 1- Préciser quel est ce mouvement.

2- 2- Donner l'équation horaire $\theta(t)$.

3- Mouvement dans le référentiel R_t

3- 1- Donner l'expression du vecteur vitesse de P , $\vec{V}(P/R_t)$ en fonction de γ , ω_0 et t .

3- 2- Même chose pour le vecteur accélération $\vec{\gamma}(P/R_t)$.

3- 3- Donner l'équation de la trajectoire en coordonnées polaires.

3- 4- Faire une représentation (on prendra les valeurs pour $t = 0 \text{ s}$; $t = 0,5 \text{ s}$; $t = 1 \text{ s}$; $t = 1,5 \text{ s}$ et $t = 2 \text{ s}$). Représenter les vecteurs vitesses.

4- Utilisation des lois de composition des vitesses et des accélérations :

4- 1 - Écrire la loi de composition des vitesses.

4- 2- Exprimer le vecteur vitesse d'entraînement de R_m/R_t pour le point P .

4- 3- Vérifier que cette loi redonne bien $\vec{V}(P/R_t)$ (3- 1).

4- 4- Exprimer la loi de composition des accélérations.

4- 5- Déterminer l'accélération d'entraînement.

4- 6- Déterminer l'accélération de Coriolis ou accélération complémentaire.

4- 7- Vérifier que cette loi redonne bien $\vec{\gamma}(P/R_t)$ (3- 2).

