

Correction de la série N°2 : Cinématique et changement de référentiel

Exercice N°1

On considère un point matériel M se déplaçant dans le plan (Oxy) et R(O, x, y, z) est un référentiel muni de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les coordonnées du point M dans R sont données par :

$$x(t) = t + 1 \quad ; \quad y(t) = t^2 + 1 \quad \text{et} \quad z(t) = 0, \quad (t \text{ étant le temps})$$

- 1- Donner l'équation de la trajectoire de M dans R. En déduire sa nature ;
- 2- Calculer la vitesse $\vec{V}(M/R)$ et l'accélération $\vec{\gamma}(M/R)$ du point M.
- 3- Déterminer les vecteurs unitaires $\vec{\tau}$ tangent à la trajectoire, La normale $\vec{n}$ et la binormale $\vec{b}$ de la base de Frenet,
- 4- En Déduire le rayon de courbure ρ .

Correction de l'exercice N°1

- 1- Soit un point matériel M de coordonnées :

$$x(t) = t + 1 \quad ; \quad y(t) = t^2 + 1 \quad \text{et} \quad z(t) = 0, \quad (t \text{ étant le temps})$$

L'équation de la trajectoire de M dans R

$$t = x - 1 \quad y(t) = (x - 1)^2 + 1$$

donc la trajectoire décrite par le point M est parabole

- 2-

Calcul de la vitesse $\vec{V}(M/R)$

$$\begin{aligned} \vec{V}(M/R) &= \left. \frac{d\vec{OM}}{dt} \right|_R = \left. \frac{d(t+1)\vec{i} + (t^2+1)\vec{j}}{dt} \right|_R \\ &= 1\vec{i} + 2t\vec{j} \end{aligned}$$

Calcul de l'accélération $\vec{\gamma}(M/R)$

$$\vec{\gamma}(M/R) = \left. \frac{d\vec{V}(M/R)}{dt} \right|_R = \left. \frac{1\vec{i} + 2t\vec{j}}{dt} \right|_R = 2\vec{j}$$

- 3-

- **Vecteur unitaire $\vec{\tau}$ tangent à la trajectoire**

$\vec{\tau}$ à la même direction et le sens que le vecteur vitesse

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|}$$

$$\vec{V} = 1\vec{i} + 2t\vec{j} \quad \& \quad \|\vec{V}\| = \sqrt{1+4t^2}$$

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|} = \frac{1\vec{i} + 2t\vec{j}}{\sqrt{1+4t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\vec{i} + \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}}\vec{j}$$

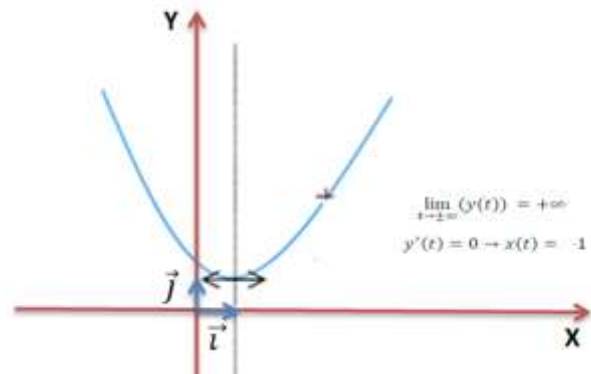
- **La normale $\vec{n}$ à la trajectoire**

Soit s l'abscisse curviligne, la normale à la trajectoire est donnée par la relation :

$$\vec{n} = \vec{b} \wedge \vec{\tau} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} \\ \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{-1}{\sqrt{1+4t^2}}\vec{i} + \frac{1t}{\sqrt{1+4t^2}}\vec{j}$$

- **La binormale $\vec{b}$**

C'est un vecteur unitaire perpendiculaire aux deux premiers, d'où : $\vec{b} = \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



4- Le rayon de courbure ρ

Dans la base de Frénet, l'accélération du point matériel est égale s'écrit : $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_N + \vec{\gamma}_t$

Où $\vec{\gamma}_N$ et $\vec{\gamma}_t$ sont respectivement l'accélération normale et tangentielle.

Or nous savons que : $\gamma_N = \frac{v^2}{\rho}$, calculons γ_N :

$$\text{Comme } \gamma_t = \frac{dv}{dt} = \frac{4t}{\sqrt{1+4t^2}} \quad \text{donc} \quad \gamma_N^2 = \gamma^2 - \gamma_t^2 = 4 - \frac{16t^2}{1+4t^2} = \frac{4+16t^2-16t^2}{1+4t^2} = \frac{4}{1+4t^2}$$

$$\rho = \frac{V^2}{\gamma_N} = \frac{1+4t^2}{\sqrt{\frac{4}{1+4t^2}}} = \frac{(1+4t^2)^{3/2}}{2}$$

Exercice N°2

On considère une courbe (C) sur laquelle se déplace un point matériel M d'abscisse curviligne (t). Le vecteur vitesse du point M dans un repère orthonormé direct $R(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est $\vec{V}(M/R)$ de module V. On définit la base locale (ou base de Frenet) $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$ telle que $\vec{V}(M/R) = V\vec{\tau}$.

1- Que désignent les vecteurs $\vec{\tau}$, $\vec{n}$ et $\vec{b}$?

2- Quelle relation existe-t-il entre $s(t)$ et V ?

3- Montrer que le vecteur accélération du point M dans le repère $\mathcal{R}$ est donné par : $\vec{\gamma}(M) = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\vec{n}$

R_c étant le rayon de courbure de la trajectoire (C) au point M.

4- Exprimer R_c en fonction de $\vec{V}(M/R)$ et $\vec{\gamma}(M)$.

Correction de l'exercice N°2

1- La signification des vecteurs $\vec{\tau}$, $\vec{n}$ et $\vec{b}$

$\vec{\tau}$: Vecteur unitaire tangent à la trajectoire en M et de même sens que le mouvement

$\vec{n}$: Vecteur unitaire normal à la trajectoire en M et dirigé vers le centre de la courbure

$\vec{b}$: Vecteur unitaire $\perp$ au plan qui contient les deux vecteurs $\vec{\tau}$ et $\vec{n}$.

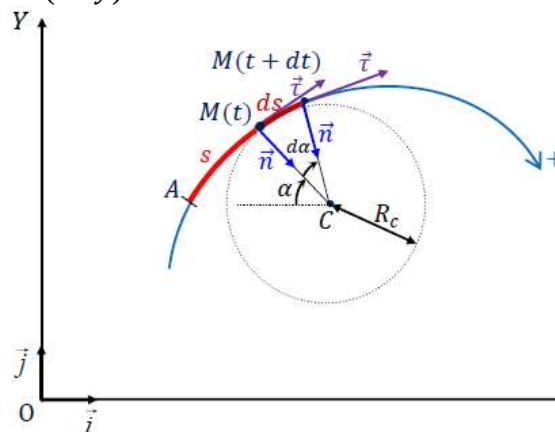
2- La relation qui existe entre $s(t)$ et V.

$$V = \frac{ds}{dt}$$

3- Montrons que le vecteur accélération du point M dans le repère $\mathcal{R}$ est donné par : $\vec{\gamma}(M) = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\vec{n}$.

On a : $\vec{V}(M/R) = V\vec{\tau} \Rightarrow \vec{\gamma}(M) = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + V\frac{d\vec{\tau}}{dt}$

Reste à chercher $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$. Pour cet effet, on va considérer un point matériel en mouvement sur une trajectoire curviligne contenue dans le plan (xOy):



De sa part, le terme $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$ peut s'écrire sous la forme : $\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{d\alpha} \frac{d\alpha}{ds} \frac{ds}{dt}$ Et comme $ds = R_c d\alpha$ et $\frac{d\vec{\tau}}{d\alpha} = \vec{n}$ et $\frac{ds}{dt} = V$

On obtient alors : $\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{V}{R_c} \vec{n}$

Par conséquent : $\vec{\gamma}(M) = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\vec{n}$

4- Exprimons R_c en fonction de $\vec{V}(M/R)$ et $\vec{\gamma}(M)$

On a : $\vec{V}(M/R) = V\vec{\tau}$ et $\vec{\gamma}(M) = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + V\frac{d\vec{\tau}}{dt}$

$$\Rightarrow \vec{V}(M/R) \wedge \vec{\gamma}(M) = \frac{V^3}{R_c} \vec{b} \quad (\text{car } \vec{\tau} \wedge \vec{n} = \vec{b})$$

$$\Rightarrow \|\vec{V}(M/R) \wedge \vec{\gamma}(M)\| = \frac{V^3}{R_c}$$

$$\Rightarrow R_c = \frac{V^3}{\|\vec{V}(M/R) \wedge \vec{\gamma}(M)\|}$$

Exercice N°3

Dans le plan xOy , une droite Ox' tourne autour de Oz avec une vitesse angulaire constante. Un mobile M se déplace sur la droite Ox' suivant la loi : $r = a \sin \theta$ avec $\theta = \omega t$ et $a = \text{cte}$.

1. Déterminer à l'instant t en fonction de a et ω , la vitesse relative et la vitesse d'entraînement de M par leurs projections dans le repère mobile $x'Oy'$. En déduire la vitesse absolue exprimée dans cette même base de projection, et montrer que le module de celle-ci est constant.
2. Déterminer à l'instant t en fonction de a et ω , l'accélération relative, l'accélération d'entraînement et l'accélération complémentaire de M par leurs projections dans le repère mobile $x'Oy'$. En déduire l'accélération absolue exprimée dans cette même base de projection, et montrer que le module de celle-ci est constant.

Correction de l'exercice N°3

$$1- \vec{V}_r = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Big|_{R'} = a \omega \cos \omega t \vec{i}'$$

$$\vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} \Big|_R + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \omega \vec{k} \wedge \overrightarrow{OM} = a \omega \cos \omega t \vec{j}'$$

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e = a \omega \cos \omega t \vec{i}' + a \omega \cos \omega t \vec{j}'$$

On écrit de la façon suivante les vecteurs unitaires

$$\vec{i}' = \cos \omega t \vec{i} + \sin \omega t \vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{j}' = -\sin \omega t \vec{i} + \cos \omega t \vec{j}$$

Si on remplace ces expressions dans la vitesse absolue :

$$\vec{V}_a = a \omega \cos \omega t (\cos \omega t \vec{i} + \sin \omega t \vec{j}) + a \omega \cos \omega t (-\sin \omega t \vec{i} + \cos \omega t \vec{j})$$

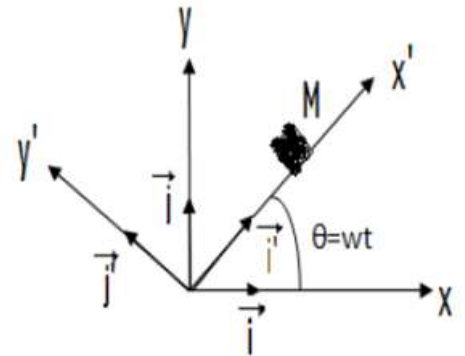
$$\vec{V}_a = a \omega (\cos \omega t \cos \omega t - \sin \omega t \sin \omega t) \vec{i} + (\cos \omega t \sin \omega t + \sin \omega t \cos \omega t) \vec{j}$$

$$2- \vec{\gamma}_r = \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} \Big|_{R'} = -a \omega^2 \sin \omega t \vec{i}'$$

$$\vec{\gamma}_e = \omega \vec{k} \wedge (\omega \vec{k} \wedge \overrightarrow{OM}) = -a \omega^2 \sin \omega t \vec{i}'$$

$$\vec{\gamma}_c = 2(\omega \vec{k} \wedge \vec{V}_r) = 2a \omega^2 \cos \omega t \vec{j}'$$

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c = -2a \omega^2 \sin \omega t \vec{i}' + 2a \omega^2 \cos \omega t \vec{j}'$$



Exercice N°4

Un anneau de faibles dimensions, assimilable à un point matériel M de masse m , glisse sans frottement sur une tige rigide (D) la tige (d) tourne autour de Oz avec la vitesse angulaire $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, ou θ représente un angle orienté ($\vec{i}, \vec{u}_r$) et $\vec{u}_r$ est un vecteur unitaire de (D) (Voir figure).

Le mouvement du point M sur la droite (D) est décrit par l'équation horaire :

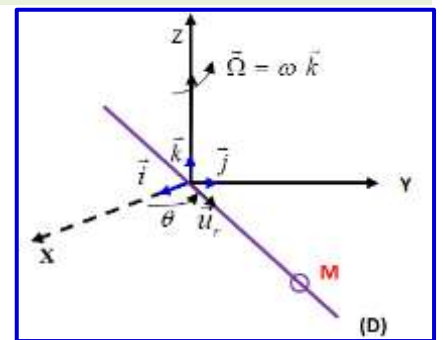
$$r = r_0(1 + \sin \omega t), \text{ ou } r_0 \text{ est constante positive et } \vec{r} = \overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r.$$

On appelle mouvement relatif de M son mouvement sur la droite (D) , et mouvement absolu son mouvement par rapport au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Déterminer pour M , dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.

1- La vitesse et l'accélération relatives.

2- La vitesse et l'accélération d'entraînement.

3- L'accélération de Coriolis.



Correction de l'exercice N°4

$$1- \text{La vitesse et l'accélération relatives : } \vec{V}_r = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Big|_{\vec{u}_r} = r_0 \omega \cos \omega t \vec{u}_r$$

$$\vec{\gamma}_r = \frac{d\vec{V}_r}{dt} \Big|_{\vec{u}_r} = -r_0 \omega^2 \sin \omega t \vec{u}_r$$

2- La vitesse et l'accélération d'entraînement :

$$\vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} \Big|_R + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \omega \vec{k} \wedge r_0(1 + \sin \omega t) \vec{u}_r = r_0 \omega (1 + \sin \omega t) \vec{u}_\theta$$

Autre méthode : $\vec{V}_e = \frac{d\vec{OM}}{dt} \Big|_{\vec{u}_r}$ *M fixe dans le repère relatif* $= r_0\omega(1 + \sin \omega t)\vec{u}_\theta$

$$\vec{\gamma}_e = \omega \vec{k} \wedge (\omega \vec{k} \wedge \vec{OM}) = \omega \vec{k} \wedge (r_0\omega(1 + \sin \omega t)\vec{u}_\theta) = -r_0\omega^2(1 + \sin \omega t)\vec{u}_r$$

3- L'accélération de Coriolis : $\vec{\gamma}_c = 2(\omega \vec{k} \wedge \vec{V}_r) = -2r_0\omega^2 \cos \omega t \vec{k} \wedge \vec{u}_r = -2r_0\omega^2 \cos \omega t \vec{u}_\theta$

Exercice N°5

Dans le plan **OXY**, un cercle de rayon **R**, de diamètre **OA**, tourne à la vitesse angulaire constante ω autour du point **O**. On lie à son centre mobile **O'** deux axes rectangulaires **O'X'Y'** (l'axe **O'X'** est dirigé suivant **OA**).

A l'instant $t = 0$, **A** est sur **OX** (**OX** et **O'X'** étant colinéaires).

Un point **M**, initialement en **A**, parcourt la circonférence dans le sens positif avec la même vitesse angulaire ω .

1- Calculer directement les composantes des vecteurs vitesse et accélération de **M** dans le repère **OXY** (en dérivant les composantes de $\vec{OM}$).

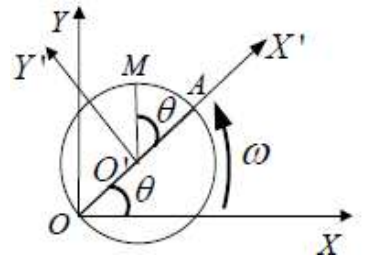
2- Calculer les composantes de la vitesse et de l'accélération relatives de **M** dans le repère **O'X'Y'** puis dans **OXY**.

3-

3- 1- Calculer les composantes de la vitesse d'entraînement dans le repère **OXY** par la loi de décomposition des vitesses.

3- 2- Calculer de même les composantes de l'accélération d'entraînement dans le repère **OXY**; en déduire l'accélération complémentaire (Coriolis).

4- Vérifier les expressions des composantes de la vitesse d'entraînement et celle de l'accélération complémentaire en utilisant les expressions faisant intervenir le vecteur rotation $\vec{\omega}$.



Correction de l'exercice N°5

1- A partir de la figure ci-dessous, on écrit l'expression du vecteur position dans le repère fixe OXY :

$$\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M}$$

Durant le temps t , l'angle balayé par le point **A** par rapport au repère fixe est $\theta = \omega t$.

L'angle que balaie le point **M** durant le même temps t par rapport au repère Mobile **O'X'Y'** est égale aussi à $\theta = \omega t$, mais par rapport au repère fixe **OXY**, il balaie l'angle $2\theta = 2\omega t$.

La vitesse et l'accélération du point par rapport au repère **OXY** sont la vitesse et l'accélération absolues.

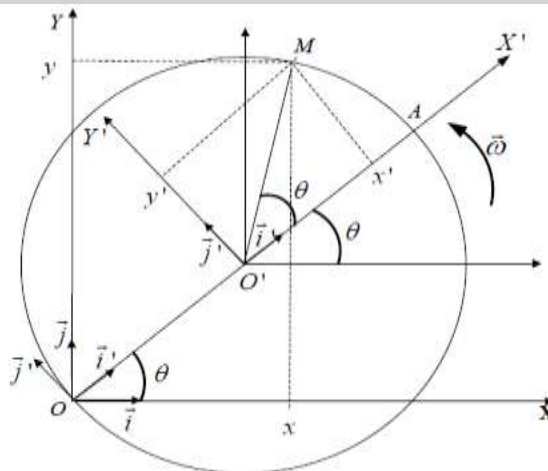
En se basant sur la figure ci-dessous :

$$\left. \begin{aligned} \vec{OO'} &= R\cos\omega t \vec{i} + R\sin\omega t \vec{j} \\ \vec{O'M} &= R\cos 2\omega t \vec{i} + R\sin 2\omega t \vec{j} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{OM} = (R\cos\omega t + R\cos 2\omega t) \vec{i} + (R\sin\omega t + R\sin 2\omega t) \vec{j}$$

Par dérivations successives de $\vec{OM}$ on obtient la vitesse et l'accélération absolues :

$$\vec{V}_a(M) = \frac{d\vec{OM}}{dt} \Big|_R = -R\omega(\sin\omega t + 2\sin 2\omega t) \vec{i} + R\omega(\cos\omega t + 2\cos 2\omega t) \vec{j}$$

$$\vec{\gamma}_a(M) = \frac{d\vec{V}_a(M)}{dt} = -R\omega^2(\cos\omega t + 4\cos 2\omega t) \vec{i} - R\omega^2(\sin\omega t + 4\sin 2\omega t) \vec{j}$$



2- Ecrivons l'expression du vecteur position dans le repère mobile **O'X'Y'** en exploitant la figure ci-dessus :

$$\vec{O'M} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' = R(\cos\omega t \vec{i}' + \sin\omega t \vec{j}')$$

La vitesse et l'accélération du point **M** par rapport au repère mobile **O'X'Y'** sont la vitesse et l'accélération relatives. En dérivant le vecteur $\vec{O'M}$ deux fois successives on obtient la vitesse et l'accélération relatives :

$$\begin{aligned}\vec{V}_r(M) &= \left. \frac{d\vec{O'M}}{dt} \right)_{R'} = R\omega(-\sin \omega t \vec{i}' + \cos \omega t \vec{j}') \\ \vec{\gamma}_r(M) &= \left. \frac{d\vec{V}_r(M)}{dt} \right)_{R'} = -R\omega^2(\cos \omega t \vec{i}' + \sin \omega t \vec{j}')\end{aligned}$$

Ecrivons maintenant l'expression du vecteur position dans le repère fixe **OXY** à partir de la figure ci-dessus :

$$\vec{O'M} = x\vec{i} + y\vec{j} = R(\cos 2\omega t \vec{i} + \sin 2\omega t \vec{j})$$

L'expression de la vitesse et l'accélération dans le repère OXY.

$$\vec{V}_r = \frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'$$

A partir de la figure nous pouvons désigner :

$$\begin{aligned}\vec{i}' &= \cos \omega t \vec{i} + \sin \omega t \vec{j} & x' &= R \cos \omega t; & \frac{dx'}{dt} &= -R\omega \sin \omega t \\ \vec{j}' &= -\sin \omega t \vec{i} + \cos \omega t \vec{j} & y' &= R \sin \omega t; & \frac{dy'}{dt} &= R\omega \cos \omega t\end{aligned}$$

Après substitution, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\vec{V}_r &= (-R\omega \sin \omega t)(\cos \omega t \vec{i} + \sin \omega t \vec{j}) + (R\omega \cos \omega t)(-\sin \omega t \vec{i} + \cos \omega t \vec{j}) \\ \vec{V}_r &= -2R\omega \underbrace{\sin \omega t \cos \omega t}_{\frac{1}{2}\sin 2\omega t} \vec{i} + R\omega \underbrace{(-\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t)}_{\cos 2\omega t} \vec{j}\end{aligned}$$

Donc la vitesse relative du mobile **M** par rapport à **OXY** est : $\vec{V}_r = R\omega(-\sin 2\omega t \vec{i} + \cos 2\omega t \vec{j})$

L'accélération relative du mobile **M** par rapport à **OXY** n'est pas égale à la dérivée de $\vec{V}$ par rapport au temps.

$$\vec{\gamma}_r = \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j}' + \underbrace{\frac{d^2z'}{dt^2}}_0 \vec{k}'$$

$$\begin{aligned}\vec{i}' &= \cos \omega t \vec{i} + \sin \omega t \vec{j} & x' &= R \cos \omega t; & \frac{d^2x'}{dt^2} &= -R\omega^2 \cos \omega t \\ \vec{j}' &= -\sin \omega t \vec{i} + \cos \omega t \vec{j} & y' &= R \sin \omega t; & \frac{d^2y'}{dt^2} &= -R\omega^2 \sin \omega t\end{aligned}$$

En remplaçant on obtient :

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}_r &= (-R\omega^2 \cos \omega t)(\cos \omega t \vec{i} + \sin \omega t \vec{j}) + (-R\omega^2 \sin \omega t)(-\sin \omega t \vec{i} + \cos \omega t \vec{j}) \\ \vec{\gamma}_r &= (-R\omega^2 \cos^2 \omega t \vec{i} - R\omega^2 \cos \omega t \sin \omega t \vec{j}) + (R\omega^2 \sin^2 \omega t \vec{i} - R\omega^2 \sin \omega t \cos \omega t \vec{j}) \\ \vec{\gamma}_r &= -R\omega^2(\cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t)\vec{i} - R\omega^2 2 \cos \omega t \sin \omega t \vec{j} = -R\omega^2 \cos 2\omega t \vec{i} - R\omega^2 2 \frac{1}{2} \sin 2\omega t \vec{j}\end{aligned}$$

Donc l'accélération relative du mobile **M** par rapport à **OXY** est égale à : $\vec{\gamma}_r = -R\omega^2(\cos 2\omega t \vec{i} + \sin 2\omega t \vec{j})$

3- 1- calcul de la vitesse d'entraînement, en utilisant la loi de composition des vitesses est :

$$\begin{aligned}\vec{V}_e(M) &= \left. \frac{d\vec{OO'}}{dt} \right)_{R'} + x' \frac{d\vec{i}'}{dt} + y' \frac{d\vec{j}'}{dt} + \underbrace{z' \frac{d\vec{k}'}{dt}}_{\vec{0}} \\ \vec{OO'} &= R \cos \omega t \vec{i} + R \sin \omega t \vec{j} \Rightarrow \left. \frac{d\vec{OO'}}{dt} \right)_{R'} = -R\omega \sin \omega t \vec{i} + R\omega \cos \omega t \vec{j} \\ \vec{i}' &= \cos \omega t \vec{i} + \sin \omega t \vec{j} \Rightarrow \frac{d\vec{i}'}{dt} = -\omega \sin \omega t \vec{i} + \omega \cos \omega t \vec{j} & x' &= R \cos \omega t \\ \vec{j}' &= -\sin \omega t \vec{i} + \cos \omega t \vec{j} \Rightarrow \frac{d\vec{j}'}{dt} = -\omega \cos \omega t \vec{i} - \omega \sin \omega t \vec{j} & y' &= R \sin \omega t\end{aligned}$$

$$\vec{V}_e(M) = -R\omega \sin \omega t \vec{i} + R\omega \cos \omega t \vec{j} + R \cos \omega t [-\omega \sin \omega t \vec{i} + \omega \cos \omega t \vec{j}] + R \sin \omega t [-\omega \cos \omega t \vec{i} - \omega \sin \omega t \vec{j}]$$

$$\text{Donc } \vec{V}_e = -R\omega(\sin \omega t + \sin 2\omega t) \vec{i} + R\omega(\cos \omega t + \cos 2\omega t) \vec{j}$$

On peut aussi utiliser la loi de décomposition des vitesses

$$(1) - (3) \Leftrightarrow \vec{V}_e = \vec{V}_a - \vec{V}_r = [-R\omega(\sin \omega t + 2\sin 2\omega t) \vec{i} + R\omega(\cos \omega t + 2\cos 2\omega t) \vec{j}] - [R\omega(-\sin 2\omega t \vec{i} + \cos 2\omega t \vec{j})]$$

$$\vec{V}_e = -R\omega(\sin \omega t + \sin 2\omega t) \vec{i} + R\omega(\cos \omega t + \cos 2\omega t) \vec{j}$$

3- 2- L'accélération d'entraînement en appliquant la loi de composition des accélérations est :

$$\vec{\gamma}_e = \left. \frac{d^2\vec{OO'}}{dt^2} \right)_{R'} + x' \frac{d^2\vec{i}'}{dt^2} + y' \frac{d^2\vec{j}'}{dt^2} + \underbrace{z' \frac{d^2\vec{k}'}{dt^2}}_{\vec{0}}$$

$$\overrightarrow{OO'} = R \cos \omega t \vec{i} + R \sin \omega t \vec{j} \quad ; \quad \left. \frac{d^2 \overrightarrow{OO'}}{dt^2} \right)_R = -R\omega^2 \cos \omega t \vec{i} - R\omega^2 \sin \omega t \vec{j}$$

$$\frac{d^2 \vec{i}'}{dt^2} = -\omega^2 \cos \omega t \vec{i} - \omega^2 \sin \omega t \vec{j} \quad ; \quad x' = R \cos \omega t$$

$$\frac{d^2 \vec{j}'}{dt^2} = \omega^2 \sin \omega t \vec{i} - \omega^2 \cos \omega t \vec{j} \quad ; \quad y' = R \sin \omega t$$

En remplaçant on obtient :

$$\vec{\gamma}_e = -R\omega^2 \cos \omega t \vec{i} - R\omega^2 \sin \omega t \vec{j} + R \cos \omega t (-\omega^2 \cos \omega t \vec{i} - \omega^2 \sin \omega t \vec{j}) + R \sin \omega t (\omega^2 \sin \omega t \vec{i} - \omega^2 \cos \omega t \vec{j})$$

D'où l'accélération d'entraînement du mobile **M** :

$$\vec{\gamma}_e = [-R\omega^2 \cos \omega t - R\omega^2 \underbrace{(-\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t)}_{\cos 2\omega t}] \vec{i} - R\omega^2 (\sin \omega t + \underbrace{2 \sin \omega t \cos \omega t}_{\frac{1}{2} \sin 2\omega t}) \vec{j}$$

$$\vec{\gamma}_e = -R\omega^2 (\cos \omega t + \cos 2\omega t) \vec{i} - R\omega^2 (\sin \omega t + \sin 2\omega t) \vec{j}$$

Déduction de l'accélération de Coriolis ou accélération complémentaire :

$$\vec{\gamma}_c = 2 \left[\frac{dx'}{dt} \frac{d\vec{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt} \frac{d\vec{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt} \frac{d\vec{k}'}{dt} \right]$$

Ou à partir de la relation

Le résultat est le même

$$\vec{\gamma}_c = \vec{\gamma}_a - \vec{\gamma}_r - \vec{\gamma}_e$$

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = -\omega \cos \omega t \vec{i} + \omega \sin \omega t \vec{j} \quad ; \quad x' = R \cos \omega t \quad ; \quad \frac{dx'}{dt} = -R\omega \sin \omega t$$

$$\frac{d\vec{j}'}{dt} = -\omega \sin \omega t \vec{i} + \omega \cos \omega t \vec{j} \quad ; \quad y' = R \sin \omega t \quad ; \quad \frac{dy'}{dt} = R\omega \cos \omega t$$

$$\vec{\gamma}_c = 2 \left[\frac{dx'}{dt} \frac{d\vec{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt} \frac{d\vec{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt} \frac{d\vec{k}'}{dt} \right]$$

$$\vec{\gamma}_c = 2[R\omega \sin \omega t (-\omega \sin \omega t \vec{i} + \omega \cos \omega t \vec{j}) + R\omega \cos \omega t (-\omega \cos \omega t \vec{i} - \omega \sin \omega t \vec{j})]$$

$$\vec{\gamma}_c = 2[R\omega^2 \sin^2 \omega t \vec{i} - R\omega^2 \sin \omega t \cos \omega t \vec{j} - R\omega^2 \cos^2 \omega t \vec{i} - R\omega^2 \cos \omega t \sin \omega t \vec{j}]$$

$$\vec{\gamma}_c = 2[R\omega^2 (\sin^2 \omega t - \cos^2 \omega t) \vec{i} - 2R\omega^2 \sin \omega t \cos \omega t \vec{j}] = 2[R\omega^2 (-\cos 2\omega t) \vec{i} - 2R\omega^2 \frac{1}{2} \sin 2\omega t \vec{j}]$$

Il faudra vérifier le résultat par le calcul direct

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_c + \vec{\gamma}_e$$

4- Introduisons à présent le vecteur de rotation $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$. Pour calculer les deux composantes de la vitesse d'entraînement, on utilise :

$$\vec{V}_e = \left. \frac{d \overrightarrow{OO'}}{dt} \right)_R + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$$\vec{V}_e = -R\omega \sin \omega t \vec{i} + R\omega \cos \omega t \vec{j} + \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ R \cos 2\omega t & R \sin 2\omega t & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{V}_e = -R\omega \sin \omega t \vec{i} + R\omega \cos \omega t \vec{j} - R\omega \sin 2\omega t \vec{i} + R\omega \cos 2\omega t \vec{j}$$

$$\vec{V}_e = -R\omega (\sin \omega t + \sin 2\omega t) \vec{i} + R\omega (\cos \omega t + \cos 2\omega t) \vec{j}$$

Nous utilisons la formule démontrée en cours pour trouver l'accélération complémentaire ou accélération de Coriolis :

$$\vec{\gamma}_c = 2(\omega \vec{k} \wedge \vec{V}_r) = 2 \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -R\omega \sin 2\omega t & R\omega \cos 2\omega t & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{\gamma}_c = 2(\omega \vec{k} \wedge \vec{V}_r) = -2R\omega^2 \cos 2\omega t \vec{i} - 2R\omega^2 \sin 2\omega t \vec{j}$$

$$\vec{\gamma}_c = 2(\omega \vec{k} \wedge \vec{V}_r) = -2R\omega^2 (\cos 2\omega t \vec{i} + \sin 2\omega t \vec{j})$$