

Série N°3 : Dynamique et Aspects Energétiques (Facultatif)

Exercice N°1

Exercice 6 : Pendule oscillant

Un point matériel M de masse m est suspendu à un fil inextensible de longueur l. L'autre extrémité O₁ du fil se déplace horizontalement le long de l'axe (Oy) en effectuant des oscillations sinusoïdales d'amplitude X et de pulsation ω :

$$\overrightarrow{OO_1} = X \sin \omega t \, \overrightarrow{u_y}$$

On considérera le référentiel d'étude $\mathcal{R}$ du laboratoire, associé au repère (O, $\overrightarrow{u_x}$, $\overrightarrow{u_y}$, $\overrightarrow{u_z}$), galiléen.

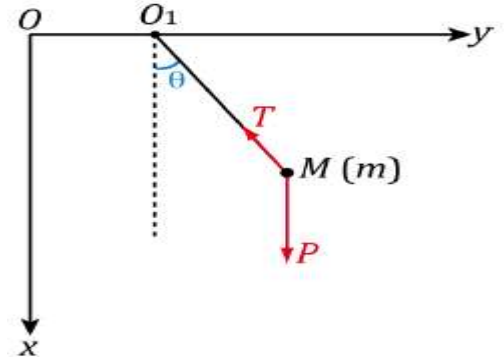
A l'instant t, on note θ l'inclinaison du fil du pendule par rapport à la verticale descendante (Ox).

Le Pendule est initialement au repos : $\theta(t=0) = 0$ et $\dot{\theta}(t=0) = 0$

1- Appliquer le principe fondamental de la dynamique au point matériel M dans $\mathcal{R}$. En déduire une égalité ne faisant intervenir que X, l, g, ω , θ , $\dot{\theta}$ et t.

2- On s'intéresse aux petites oscillations du pendule, (c'est - à - dire qu'on peut considérer θ , $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$ petits devant 1). Etablir l'équation différentielle vérifiée par θ .

3) En recherchant une solution particulière sinusoïdale du type $\theta = C \sin \omega t$, exprimer θ en fonction de X, l, g, ω , et t.



Correction de l'exercice N°1

1- Bilan des Forces exercées sur M :

- poids : $\vec{P} = m \vec{g} = m g \overrightarrow{u_z}$
- tension du fil : $\vec{T} = -T \overrightarrow{u_1}$

On applique le principe fondamental de la dynamique à M dans le référentiel d'étude $\mathcal{R}$ galiléen :

$$\vec{P} + \vec{T} = m \vec{\gamma}(M/R)$$

$$m g \overrightarrow{u_z} - T \overrightarrow{u_1} = m \vec{\gamma}(M/R)$$

On exprime le vecteur accélération dans la base ($\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$) :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M} = X \sin(\omega t) \overrightarrow{u_x} + l \overrightarrow{u_1}$$

$$\vec{V}(M/R) = X \omega \cos(\omega t) \overrightarrow{u_x} + l \dot{\theta} \overrightarrow{u_2}$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = -X \omega^2 \sin(\omega t) \overrightarrow{u_x} - l \dot{\theta}^2 \overrightarrow{u_1} + l \ddot{\theta} \overrightarrow{u_2}$$

$$\overrightarrow{u_x} = \cos \theta \overrightarrow{u_2} + \sin \theta \overrightarrow{u_1}$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = [-l \dot{\theta}^2 - X \omega^2 \sin(\omega t) \cos \theta] \overrightarrow{u_1} + [l \ddot{\theta} - X \omega^2 \sin(\omega t) \sin \theta] \overrightarrow{u_2}$$

On projette alors le PFD selon $\overrightarrow{u_2}$ afin de faire disparaître la tension du fil, de norme inconnue :

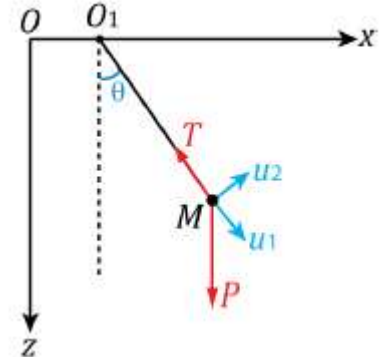
$$m[l \ddot{\theta} - X \omega^2 \sin(\omega t) \cos \theta] = -m g \sin \theta$$

$$l \ddot{\theta} - X \omega^2 \sin(\omega t) \cos \theta = -g \sin \theta$$

2- On considère des petites oscillations du pendule :

$$\theta, \dot{\theta} \text{ et } \ddot{\theta} \Rightarrow \begin{cases} \sin \theta \approx \theta \\ \cos \theta \approx 1 \end{cases}$$

On peut donc réécrire l'équation précédente selon :



$$l\ddot{\theta} - X\omega^2 \sin(\omega t) = -g\theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = \frac{X\omega^2}{l} \sin(\omega t)$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = \frac{X\omega^2}{l} \sin(\omega t) \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}}$$

3) L'évolution du mouvement est régie par une équation différentielle du second ordre à coefficients constants avec second membre. La solution de cette équation est :

Solution générale = {Solution particulière} + {Solution de l'équation sans second membre}

Solution sans second membre : $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \Rightarrow \theta_{ssm}(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$

Solution particulière : $\theta_{sp}(t) = C \sin \omega t$

La solution particulière doit être solution de l'équation différentielle sur θ . On a donc :

$$-\omega^2 C \sin(\omega t) + \omega_0^2 C \sin(\omega t) = \frac{X\omega^2}{l} \sin(\omega t) \Leftrightarrow C = \frac{X\omega^2}{l(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

La solution générale est donc :

$$\theta(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + \frac{X\omega^2}{l(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin(\omega t)$$

Les constantes d'intégration A et B se déduisent des conditions initiales :

$$\begin{cases} \theta(0) = 0 \\ \dot{\theta}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B\omega_0 + \frac{X\omega^3}{l(\omega_0^2 - \omega^2)} = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\theta(t) = \frac{X\omega^2}{l(\omega_0^2 - \omega^2)} \left[\sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \right]}$$

Exercice N°2 : Pendule conique (examen SMC – Rattrapage)

Le référentiel d'étude $\mathcal{R}$, associé au repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, est supposé galiléen. On étudie un pendule, constitué d'un fil inextensible de longueur l attaché au point O , au bout duquel se trouve un point matériel M de masse m . La base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ est liée au point M . On supposera que le fil reste tendu en permanence et que les éventuels frottements sont négligeables.

On s'intéresse à la situation d'un **pendule conique**, pour lequel la trajectoire du fil dans $(\mathcal{R})$ est un cône d'angle au sommet α constant.

1- Montrer que le vecteur position s'écrit comme suit : $\vec{OM} = l \sin \alpha \vec{e}_r - l \cos \alpha \vec{e}_z$

2- Exprimer les vecteurs vitesse absolue $\vec{V}(M)_R$ et accélération $\vec{\gamma}(M)_R$ dans $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

3- Exprimer les forces agissant sur le point M dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

4- Ecrire le principe fondamentale de la dynamique dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

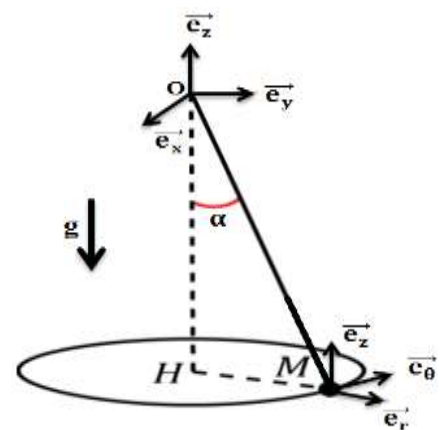
5- En projetant le **PFD** sur $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_z$, montrer que la vitesse angulaire ω de rotation de M est constante et l'exprimer en fonction de l , g et α . On note que : $\dot{\theta} = \omega$.

6- Quelle valeur minimale peut prendre ω ? Cette valeur sera notée $\omega_{\min}$.

7- Que se passe-t-il pour $\omega < \omega_{\min}$?

8- L'expérience montre que α augmente lorsque ω augmente. Quelle est la valeur limite prise par α lorsque $\omega \rightarrow \infty$?

9- Exprimer la norme T de tension du fil en fonction de m , g et α .



10- Sachant que le fil cède lorsque la tension du fil dépasse une valeur limite $T_{\max}$, exprimer l'angle $\alpha_{\max}$ et la vitesse angulaire $\omega_{\max}$ que peut atteindre le pendule conique.

11- **Application numérique** : $m = 20 \text{ g}$, $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$, $l = 50 \text{ cm}$ et $T_{\max} = 2 \text{ N}$. Déterminer $\omega_{\max}$ en tour par seconde.

Correction de l'exercice N°2

1- le vecteur position s'écrit comme suit :

$$\vec{OM} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z = l \sin \alpha \vec{e}_r - l \cos \alpha \vec{e}_z \quad \text{avec} \quad r = l \sin \alpha \text{ et } z = -l \cos \alpha$$

2-

$$\text{Le vecteur vitesse absolue } \vec{V}(\mathbf{M})_R = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_R = l \sin \alpha \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\text{Le vecteur accélération : } \vec{\gamma}(\mathbf{M})_R = \left(\frac{d\vec{V}(\mathbf{M})_R}{dt} \right)_R = -l \sin \alpha \dot{\theta}^2 \vec{e}_r + l \sin \alpha \ddot{\theta} \vec{e}_\theta$$

3- Les forces agissant sur le point $\mathbf{M}$ dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

✚ Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg \vec{e}_z$

✚ Tension du fil : $\vec{T} = -T \sin \alpha \vec{e}_r + T \cos \alpha \vec{e}_z$

4- Le principe fondamentale de la dynamique.

$$\vec{P} + \vec{T} = m \vec{\gamma}(\mathbf{M})_R$$

$$-mg \vec{e}_z - T \sin \alpha \vec{e}_r + T \cos \alpha \vec{e}_z = -ml \sin \alpha \dot{\theta}^2 \vec{e}_r + ml \sin \alpha \ddot{\theta} \vec{e}_\theta$$

5- En projetant le **PFD** sur $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_z$, on trouve :

$$\begin{pmatrix} -T \sin \alpha = -ml \sin \alpha \dot{\theta}^2 \\ 0 = ml \sin \alpha \ddot{\theta} \\ -mg + T \cos \alpha = 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} T = ml \dot{\theta}^2 \\ \ddot{\theta} = 0 \text{ donc } \dot{\theta} = \text{cste} = \omega \\ mg = T \cos \alpha \end{pmatrix}$$

On vient ainsi de démontrer que la vitesse angulaire de rotation de $\mathbf{M}$ est constante, de valeur donnée par la première équation du système :

$$T = ml \omega^2$$

$$\omega^2 = \frac{T}{ml} \quad \text{avec} \quad mg = T \cos \alpha \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l \cos \alpha}}$$

ω Représente une vitesse angulaire de rotation: c'est donc une grandeur positive et bornée. Il n'y a donc de solution que si : $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}[$

6- La vitesse angulaire atteint sa valeur minimale lorsque $\cos \alpha$ atteint sa valeur maximale :

$$\cos \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 0 \quad \text{donc} \quad \omega_{\min} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

7- Si on impose au pendule une vitesse angulaire de rotation $\omega < \omega_{\min}$, il n'y a pas de valeur de α qui soit solution du problème. Le pendule ne peut donc pas décrire un cône d'angle α constant et il se dirige vers la seule position d'équilibre du problème, à savoir $\alpha = 0$.

8- L'expérience montre que α augmente lorsque ω augmente.

La valeur limite prise par α lorsque $\omega \rightarrow \infty$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l \cos \alpha}}$$

Ainsi $\omega \nearrow \Rightarrow \alpha \nearrow$

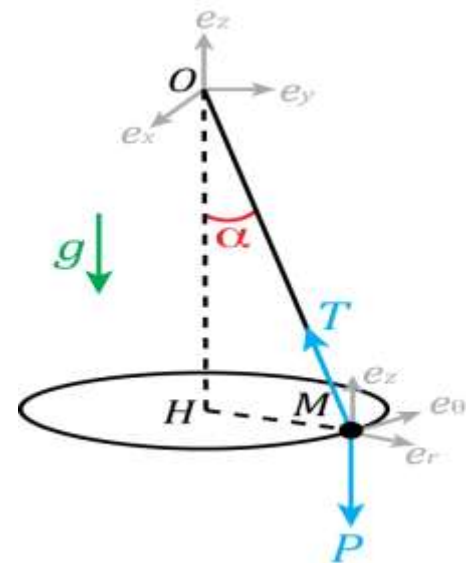
Ainsi $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \cos \alpha \rightarrow 0$ soit $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$

9- La norme T de tension du fil en fonction de m , g et α .

$$mg = T \cos \alpha \Rightarrow T = \frac{mg}{\cos \alpha}$$

10- D'après l'expression précédente :

$$T \nearrow \Leftrightarrow \cos \alpha \searrow \Leftrightarrow \alpha \nearrow$$



$$T = T_{\max} \Leftrightarrow \alpha = \alpha_{\max} = \text{Arccos}\left(\frac{mg}{T_{\max}}\right)$$

$$\text{et } \omega_{\max} = \sqrt{\frac{g}{l \cos(\alpha_{\max})}} = \sqrt{\frac{T_{\max}}{lm}}$$

11- **Application numérique** : $m = 20 \text{ g}$, $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$, $l = 50 \text{ cm}$ et $T_{\max} = 2 \text{ N}$.

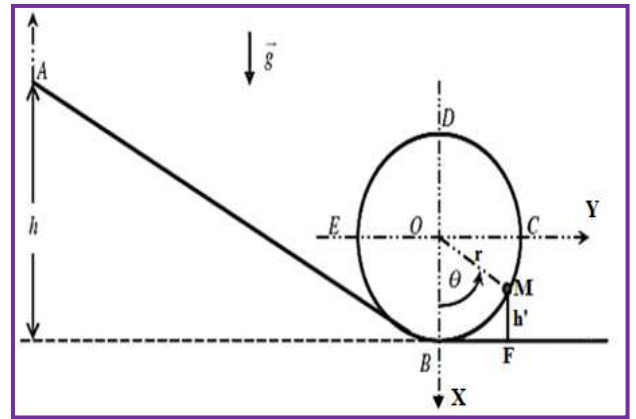
$$\alpha_{\max} = 84,4^\circ \quad \text{et} \quad \omega_{\max} = 2,25 \text{ tour.s}^{-1}$$

Exercice N°3

Partie N°1 : Le looping

Le jouet d'un enfant est constitué d'un petit chariot de masse m qui se déplace sur une piste se terminant par une boucle circulaire verticale (looping) de rayon r . Le chariot assimilé à un point matériel M glisse sur la piste (ABCDEF) sans frottement. On repère M sur la boucle par l'angle θ que fait OM avec la verticale OB (Voir la figure).

L'objectif de cette partie est de calculer la valeur minimale de l'altitude h du point A pour que le chariot abandonné en A sans vitesse initiale ($V_A = 0$) puisse faire le tour complet de la boucle en restant en contact avec la piste tout le long du trajet.



I. Étude énergétique

1- En prenant l'origine de l'énergie potentielle au niveau du sol ($E_{pp}(B) = 0 = E_{pp}(F)$), donner l'expression de l'énergie potentielle $E_{pp}(A)$ en A et $E_{pp}(M)$ en M .

2- On notera V_M la vitesse du point M dans la position repérée par θ . Écrire l'énergie mécanique totale $E_m(A)$ en A et $E_m(M)$ en M .

3- Le système est-il conservatif ? En déduire une relation entre $E_m(A)$ et $E_m(M)$.

4- En déduire l'expression de $\frac{v_M^2}{r}$ en fonction de g , r , h et θ (relation N°1).

II. Cinématique (les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$)

L'étude du mouvement de M sur la boucle (BCDE) se fait naturellement en coordonnées polaires (r, θ) et la base associée $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.

1- Exprimer le vecteur vitesse $\vec{V}(M)$ en coordonnées polaires et en déduire la relation entre V_M , r et $\dot{\theta}$. Exprimer $\frac{v_M^2}{r}$ en fonction de r et $\dot{\theta}$ (relation N°2).

2- Exprimer le vecteur accélération $\vec{\gamma}(M)$ en coordonnées polaires et en déduire, en utilisant la relation N°2 précédente, l'expression de la composante radiale (suivant $\vec{u}_r$) de l'accélération en fonction de V_M et r .

III. Dynamique (les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$)

1- On appellera $\vec{R}$ la réaction de la piste sur la masse M .

1- 1- Exprimer les forces agissant sur la masse M dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$. Représenter ces forces lorsque le chariot est sur la boucle circulaire.

1- 2- Appliquer le principe fondamental de la dynamique en M sur la partie circulaire (BCDE) dans un repère galiléen. Projeter ce principe sur $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et exprimer alors le rapport $\frac{R}{m}$ (relation 3).

2- Utiliser les relations N°1 et 3 pour exprimer $\frac{R}{m}$ en fonction de h , g , r et θ .

3- Dire que la masse fait un tour complet en restant en contact avec la piste se traduit par :

$$\text{Pour toute valeur de l'angle } \theta, \text{ la réaction } R \text{ existe : } \forall \theta, R(\theta) \geq 0$$

3- 1- Pour quelle valeur évidente de θ la réaction R est-elle minimale ?

3- 2- En déduire la valeur minimale que doit avoir l'altitude h du point A pour que le chariot réalise la looping sans quitter la piste.

3- 3- Etablir l'expression de V_D la vitesse du chariot au point D en fonction de g et r .

3- 4- Etablir l'expression de V_B la vitesse au point B , en fonction de g et r , lorsque le chariot effectue un tour complet.

Partie N°2 : Oscillation libre

On considère que le chariot assimilé à un point matériel M et abandonné en A sans vitesse initiale ($V_A = 0$)

1- Etablir l'expression de la vitesse au point B en fonction de g et r .

2- Etablir l'expression de la hauteur **h**, en fonction de **r**, pour que la valeur maximale de θ est $\theta_{\max} = \frac{\pi}{6}$

3- Par la suite, le chariot effectuera une oscillation libre autour de **B**.

Etablir l'équation horaire du mouvement $\theta(t)$ en appliquant le théorème du moment cinétique par rapport à **O** dans le repère fixe **R(XOY)**. On prend $\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta = \vec{k}$

Partie N°3 : Oscillation amortie

On considère maintenant que le chariot assimilé à un point matériel M glisse sur la piste **(ABCDE)** avec frottement et sans vitesse initiale ($V_A = 0$). Les frottements sont assimilables à une force constante de norme **f**.

Etablir l'expression de la hauteur **H** pour que le chariot atteigne juste le point **C** en fonction de **m**, **g**, **f**, **AB** et **R**.

Correction de l'exercice N°3

Partie N°1 : Le looping

I. Étude énergétique

1- $E_{pp}(A) = mgh$ et $E_{pp}(M) = mgh' = mgr(1 - \cos\theta)$

2- $E_m(A) = E_{pp}(A) + E_c(A) = mgh$

et $E_m(M) = E_{pp}(M) + E_c(M) = \frac{1}{2}mV_M^2 + mgr(1 - \cos\theta)$

3- Le système est conservatif (Pas de frottement) donc : $E_m(A) = E_m(M)$.

4- on a : $E_m(M) = E_m(A)$ donc $\frac{1}{2}mV_M^2 + mgr(1 - \cos\theta) = mgh$

Par conséquent $\frac{V_M^2}{r} = 2g \left[\frac{h}{r} - (1 - \cos\theta) \right]$ (relation n°1)

II- Cinématique

1- $\overrightarrow{V(M)} = \frac{d(r\vec{u}_r)}{dt} = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ On a donc $V_M = R\dot{\theta} \Rightarrow V_M^2 = (r\dot{\theta})^2 \Rightarrow \frac{V_M^2}{r} = r\dot{\theta}^2$ (relation n°2)

2- Le vecteur accélération :

$$\overrightarrow{\gamma(M)} = -r\dot{\theta}^2\vec{u}_r + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$$

soit $\gamma_r = -r\dot{\theta}^2 = -\frac{V_M^2}{r}$ la composante radiale de l'accélération

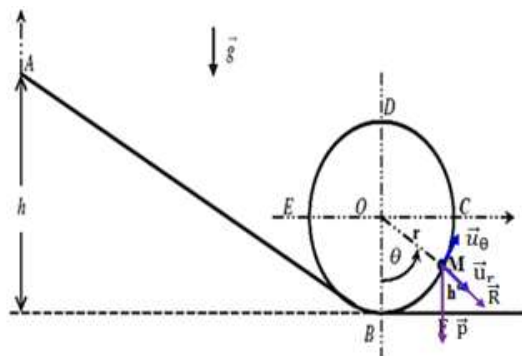
III- Dynamique

1- 1- Système : le chariot M, Référentiel terrestre considéré galiléen,

Les Forces sont :

$$\text{Poid } \vec{P} = m\vec{g} = mg(\cos\theta\vec{u}_r - \sin\theta\vec{u}_\theta)$$

La réaction $\vec{R} = R\vec{u}_r$ (réaction normale à la piste car le mouvement s'effectue sans frottement).



1- 2- Le principe fondamental de la dynamique :

$$\vec{P} + \vec{R} = m\overrightarrow{\gamma(M)}$$

La projection suivant : $\vec{u}_r$: $R - mg \cos \theta = mr\dot{\theta}^2 = m \frac{V_M^2}{r}$

$$mg \sin \theta + r \ddot{\theta} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{R}{m} = g \cos \theta + \frac{V_M^2}{r} \quad (\text{relation N°3}).$$

2- En utilisant les relations N°1 et 3 pour exprimer $\frac{R}{m}$ en fonction de **h**, **g**, **r** et θ .

$$\frac{R}{m} = g \cos \theta + \frac{V_M^2}{r} = g \cos \theta + 2g \left[\frac{h}{r} - (1 - \cos \theta) \right] = 2g \left[\frac{h}{r} - 1 + \frac{3}{2} \cos \theta \right]$$

3- Dire que la masse fait un tour complet en restant en contact avec la piste se traduit par :

Pour toute valeur de l'angle θ , la réaction R existe : $\forall \theta, R(\theta) \geq 0$

3- 1- La réaction R est minimale pour $\theta = \pi$.

3- 2- La condition pour que le chariot réalise la looping sans quitter la piste est $R_{min} \geq 0$.

Donc la valeur minimale que doit avoir l'altitude h du point A.

$$R_{min} = 0 \Rightarrow \frac{h}{r} = 1 - \frac{3}{2} \cos \pi = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

Donc :
$$h = \frac{5}{2} r$$

3- 3- L'expression de V_D la vitesse du chariot au point D.

On a démontré que : $\frac{V_M^2}{r} = 2g \left[\frac{h}{r} - (1 - \cos \theta) \right]$

Donc
$$V_D^2 = 2g r \left[\frac{5}{2} - (1 - \cos \pi) \right]$$

Soit
$$V_D = \sqrt{gr}$$

4- 4- L'expression de V_B la vitesse au point D lorsque le chariot effectuer un tour complet.

On applique le théorème d'énergie cinétique entre D et B : $\frac{1}{2} m V_B^2 - \frac{1}{2} m V_D^2 = 2mgr$

$$V_B^2 = V_D^2 + 4gr$$

Alors :
$$V_B = \sqrt{gr + 4gr} = \sqrt{5gr}$$

Partie N°2 : Oscillation libre

On considère maintenant que M effectue une oscillation libre.

1- Calcul de la vitesse au point B.

On a : $E_m(A) = E_m(B)$ donc $mgh = \frac{1}{2} m V_B^2$

Donc
$$V_B = \sqrt{2gh}$$

2- Calcul de la valeur de h pour que la valeur maximale de θ est $\theta_{max} = \frac{\pi}{6}$

$$\frac{h}{r} - (1 - \cos \theta_{max}) = 0 \Leftrightarrow \frac{h}{r} - \left(1 - \cos \frac{\pi}{6}\right) = 0$$

$$\frac{h}{r} - \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow h = 0.134 r$$

3- L'équation horaire du mouvement $\theta(t)$ en appliquant le théorème du moment cinétique.

Le théorème du moment cinétique s'écrit : $\left. \frac{d\vec{\sigma}_0(M/\mathcal{R})}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\mathcal{M}}_0(\vec{P} + \vec{R}) = \vec{OM} \wedge \vec{P} + \vec{OM} \wedge \vec{R}$

Avec l'expression du vecteur position $\vec{OM}$.

$$\vec{OM} = r \vec{u}_r$$

La vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ de M dans $\mathcal{R}$.

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = r\dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

Avec : $\vec{\sigma}_0(M/\mathcal{R}) = \vec{OM} \wedge m\vec{V}(M/\mathcal{R}) = r \vec{u}_r \wedge mr\dot{\theta} \vec{u}_\theta$

$$\Rightarrow \left. \frac{d\vec{\sigma}_0(M/\mathcal{R})}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = mr^2 \ddot{\theta} \vec{k}$$

$$\vec{OM} \wedge \vec{P} = r \vec{e}_r \wedge (mg \cos \theta \vec{u}_r - mg \sin \theta \vec{u}_\theta) = -mgr \sin \theta \vec{k}$$

$$\vec{OM} \wedge \vec{R} = \vec{0}$$

Ce qui implique que : $mr^2 \ddot{\theta} \vec{k} = -mgr \sin \theta \vec{k} \Rightarrow mr^2 \ddot{\theta} = -mgr \sin \theta$

On obtient finalement pour des faibles amplitudes : $\ddot{\theta} + \frac{g}{r} \theta = 0$

La résolution de l'équation différentielle.

$$\theta = \theta_{max} \cos \omega_0 t \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{r}} : \text{la pulsation propre du mouvement}$$

Partie N°3 : Oscillation amortie

L'EXPRESSION DE LA HAUTEUR H POUR QUE LE CHARIOT ATTEINT LE POINT C.

On applique le théorème d'énergie cinétique entre A et C :

On écrit : $\frac{1}{2} m V_C^2 - \frac{1}{2} m V_A^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{f}) = 0$

$W(\vec{P}) = mg(h - r)$ et $W(\vec{f}) = -f(AB + r \frac{\pi}{2})$

Donc : $mg(h - r) - f(AB + r \frac{\pi}{2}) = 0$

Par conséquent : $h = \frac{f}{mg} (AB + r \frac{\pi}{2}) + r$

Exercice N°4

Soit un référentiel $\mathbb{R}$ de repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. Une bille assimilée à un point P , de masse m , est astreinte à se déplacer sans frottements le long d'un demi-cercle de rayon a (Figure ci-dessous).

Le point P est attaché à un fil élastique dont l'autre extrémité est fixée en O' ($OO' = a$). Le fil possède une raideur k et une longueur à vide l_0 . Le point P est repéré par l'angle $(Ox, OP) = \theta$.

1. a/ Exprimer le vecteur $\vec{O'P}$ en fonction de a , θ dans la base polaire $(\vec{u}_r = \frac{\vec{OP}}{a}, \vec{u}_\theta)$, En déduire l'expression du module $O'P$.

b/ Exprimer la tension $\vec{T}$ du fil en fonction de a , k , l_0 et θ dans cette même base.

2. a/ Déterminer l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$ dans la base polaire.

b/ On note $\vec{F}$ la résultante des forces exercées sur la bille P . Donner l'expression de la puissance $\vec{F} \cdot \vec{v}$ en fonction de a et θ .

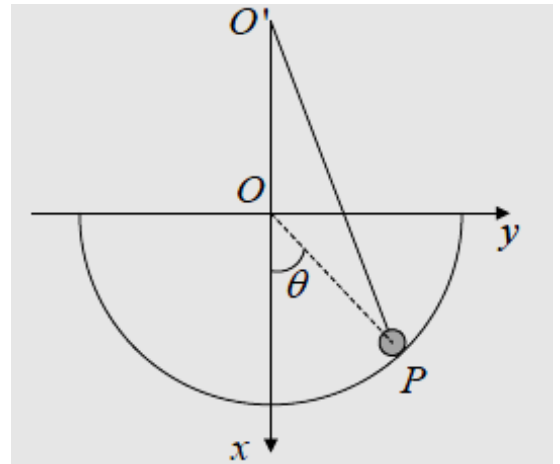
(c) En déduire l'énergie potentielle E_p dont dérive la force $\vec{F}$.

3. (a) On suppose vérifiées les relations suivantes entre les paramètres :

$$a = \frac{2mg}{k}, \quad l_0 = \sqrt{3} \left(a - \frac{mg}{k} \right)$$

Quelles sont les positions d'équilibre θ_1 et θ_2 pour $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$?

(b) Étudier la stabilité des équilibres obtenus.



Correction de l'exercice N°4

1. a/ On remarque sur la figure de l'énoncé que :

$$\left. \begin{aligned} \vec{O'P} &= \vec{OO'} + \vec{OP} \\ \vec{OO'} &= a \vec{u}_x \\ \vec{OP} &= a \vec{u}_r \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{O'P} = a (\vec{u}_x + \vec{u}_r)$$

Exprimons le vecteur unitaire $\vec{u}_x$ en fonction de $\vec{u}_r$ et de $\vec{u}_\theta$ pour obtenir l'expression demandée :

$$\vec{u}_x = \cos\theta \vec{u}_r - \sin\theta \vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{O'P} = a (1 + \cos\theta) \vec{u}_r - a \sin\theta \vec{u}_\theta$$

Le module de ce vecteur est :

$$\left. \begin{aligned} \|\vec{O'P}\| &= \sqrt{[a(1 + \cos\theta)]^2 - [a \sin\theta]^2} \\ \|\vec{O'P}\| &= \sqrt{2a^2 (1 + \cos\theta)} \\ 1 + \cos\theta &= 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \|\vec{O'P}\| = 2a \cos \frac{\theta}{2}$$

b/ la bille est soumise à une force de rappel d'expression $\vec{T} = -k(l - l_0) \vec{u}$, où $l = \|\vec{O'P}\|$ et $\vec{u}$ le vecteur unitaire suivant la direction $\vec{O'P}$. On peut décomposer le vecteur $\vec{u}$ en deux composantes : $\vec{u} = \cos \frac{\theta}{2} \vec{u}_r - \sin \frac{\theta}{2} \vec{u}_\theta$.

Donc la tension du fil élastique est :

$$\vec{T} = -k \left(2a \cos \frac{\theta}{2} - l_0 \right) \left(\cos \frac{\theta}{2} \vec{u}_r - \sin \frac{\theta}{2} \vec{u}_\theta \right)$$

2.a/ Le vecteur vitesse est défini par l'expression :

$$\vec{V} = \underbrace{\dot{a}}_{\vec{0}} \vec{u}_r + a \dot{\theta} \vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{V} = a \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

b/ La force $\vec{F}$ est la résultante de trois forces : le poids $\vec{P}$, la tension $\vec{R}$ et la réaction:

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{R}$$

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = (\vec{P} + \vec{T} + \vec{R}) \cdot \vec{v}$$

$$\vec{P} \cdot \vec{v} = (mg \cos \theta \vec{u}_r - mg \sin \theta \vec{u}_\theta) \cdot a\dot{\theta} \vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{P} \cdot \vec{v} = -a\dot{\theta} mg \sin \theta$$

$$\vec{T} \cdot \vec{v} = -k \left[(2a \cos \frac{\theta}{2} - l_0) (\cos \frac{\theta}{2} \vec{u}_r - \sin \frac{\theta}{2} \vec{u}_\theta) \right] \cdot a\dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

$$\vec{T} \cdot \vec{v} = \left[-k2a \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \vec{u}_r + k2a \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \vec{u}_\theta + kl_0 \cos \frac{\theta}{2} \vec{u}_r - kl_0 \sin \frac{\theta}{2} \vec{u}_\theta \right] \cdot a\dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

$$\vec{T} \cdot \vec{v} = a\dot{\theta} 2k a \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} - a\dot{\theta} kl_0 \sin \frac{\theta}{2} \Rightarrow \vec{T} \cdot \vec{v} = a^2 \dot{\theta} 2k \frac{1}{2} \sin \theta - a\dot{\theta} kl_0 \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\vec{R} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{R} \cdot \vec{v} = 0$$

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = (\vec{P} + \vec{T} + \vec{R}) \cdot \vec{v} \Rightarrow P = -a\dot{\theta} mg \sin \theta + a^2 \dot{\theta} 2k \frac{1}{2} \sin \theta - a\dot{\theta} kl_0 \sin \frac{\theta}{2}$$

$$P = a\dot{\theta} \left[(ka - mg) \sin \theta - kl_0 \sin \frac{\theta}{2} \right]$$

c/ A partir de la puissance on en déduit le travail élémentaire qu'on intègre pour obtenir l'expression de l'énergie potentielle :

$$\left. \begin{array}{l} dW = P dt \\ dE_p = -dW \\ P = a\dot{\theta} \left[(ka - mg) \sin \theta - kl_0 \sin \frac{\theta}{2} \right] d\theta \end{array} \right\} \Rightarrow dE_p = - \left[(ka - mg) \sin \theta - kl_0 \sin \frac{\theta}{2} \right] a\dot{\theta} dt$$

$$E_p = -a \int \left[(ka - mg) \sin \theta - kl_0 \sin \frac{\theta}{2} \right] d\theta$$

$$E_p = a \left[(ka - mg) \cos \theta - 2kl_0 \cos \frac{\theta}{2} \right] + C^{te}$$

3. a / Pour trouver les positions d'équilibre on cherche les valeurs de θ pour lesquelles la dérivée première de l'énergie potentielle s'annule. On remplace d'abord a et l_0 qui se trouvent dans la parenthèse par leurs valeurs respectives qui sont données dans l'expression de E_p : $E_p = mga \left[\cos \theta - 2\sqrt{3} \cos \frac{\theta}{2} \right]$

On dérive cette dernière expression par rapport à θ , puis on procède à une transformation trigonométrique adéquate pour obtenir à la fin le résultat suivant :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dE_p}{d\theta} = mga \left[-\sin \theta + \sqrt{3} \sin \frac{\theta}{2} \right] \\ \sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{dE_p}{d\theta} = mga \sin \frac{\theta}{2} \left[\sqrt{3} - 2 \cos \frac{\theta}{2} \right]$$

On en déduit les deux valeurs de θ pour lesquelles la dérivée première s'annule : $\left. \begin{array}{l} \frac{dE_p}{d\theta} = 0 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \theta_1 = 0 \\ \theta_2 = \frac{\pi}{3} \end{array} \right.$

b/ D'après l'énoncé on doit déterminer les positions d'équilibre stable et d'équilibre instable. Pour cela on doit chercher le signe de la seconde dérivée de l'énergie potentielle pour les deux valeurs θ_1 et θ_2 :

$$\frac{d^2 E_p}{d\theta^2} = mga \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{\theta}{2} - 1 \right]$$

$$\frac{d^2 E_p}{d\theta^2} (\theta_1 = 0) = mga \left[\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right] < 0 \quad \text{Equilibre instable}$$

$$\frac{d^2 E_p}{d\theta^2} \left(\theta_2 = \frac{\pi}{3} \right) = \frac{mga}{2} > 0 \quad \text{Equilibre stable}$$