القطب الجامعي- أيت ملول
ⵉⵅⵓ ⴰⵙⴷⵍⴰⵍ – ⴰⵢⵜ ⵎⵍⵍⵓⵍ
Campus Universitaire - Ait Melloul
El Mokhtar El Ouardi

Série N°1

Exercice N°1

Soit à déterminer la masse volumique (ρ) de la substance d'un cube homogène à partir de la mesure de sa masse (m = 3.041g) et de son arête (a = 1 cm). Calculer l'incertitude absolue et l'incertitude relative et écrire le résultat de la mesure.

Correction de l'exercice N°1 à refaire le calcul

Calcul de la masse volumique : $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{a^3}$ AN $\rho = 3{,}041\ g/cm^3$

Nous déduisons l'incertitude absolue de l'incertitude relative :

$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta m}{m} + 3\ \frac{\Delta a}{a}$ $\Longrightarrow$ $\Delta\rho = \rho(\frac{\Delta m}{m} + 3\ \frac{\Delta a}{a})$ AN $\Delta\rho = 0{,}02\ g/cm^3$

D'où l'incertitude relative : $\frac{\Delta\rho}{\rho} = 0{,}0063 = 6{,}3\ °/_{\circ\circ}$

Ecriture du résultat de la mesure : $\rho = (3{,}041\ \pm 0{,}02)\ g/cm^3$

Remarque importante :

Le nombre des chiffres significatifs conservés dans un résultat ne doit jamais impliquer une précision supérieure à celle des données.

Un calcul ne peut qu'aboutir à un résultat dont l'incertitude sera au moins égale à celle de la donnée la moins précise.

Exercice N°2

Une masse m oscille à l'extrémité d'un ressort horizontal de constante de raideur k avec une amplitude X_0.

En admettant que sa période T ne dépende que de m, k et X_0, déterminer l'expression littérale de T.

Correction de l'exercice N°2

On suppose que la période T est de la forme $T = C \times m^a k^b {X_0}^c$ où C est une constante sans dimension.

On a donc :

$$[T] = [m]^a.[k]^b[X_0]^c = M^a \times ([force].[longueur]^{-1})^b \times L^c = M^a M^b L^b T^{-2b} L^{-b} L^c$$

D'où :

$$T = M^{a+b} L^c T^{-2b} \Longrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ c=0 \\ -2b=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{2} \\ c = 0 \end{cases}$$

La période s'exprime donc sous la forme :

$$T = C \times m^{1/2} k^{-1/2}$$

Exercice N°3

On considère les vecteurs suivants : $\overrightarrow{V_1} = 5t^3\ \vec{\imath} + 3t\ \vec{\jmath} - 2t^4\ \vec{k}$ et $\overrightarrow{V_1} = \sin t\ \vec{\imath} - \cos t\ \vec{\jmath} + 3t\ \vec{k}$, avec $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base fixe.

Trouver les expressions des grandeurs : $\frac{d}{dt}(\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2})$, $\frac{d}{dt}(\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2})$ et $\frac{d}{dt}(\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_1})$

Correction de l'exercice N°3

* Calculons $\vec{V_1}.\vec{V_2}$?

$$\vec{V_1}.\vec{V_2} = \left(5t^3\,\vec{i} + 3t\,\vec{j} - 2t^4\,\vec{k}\right).\left(\sin t\,\vec{i} - \cos t\,\vec{j} + 3t\,\vec{k}\right)$$
$$= 5t^3 \sin t + 3t \cos t - 6t^5$$

Donc : $\frac{d}{dt}\left(\vec{V_1}.\vec{V_2}\right) = 15t^2 \sin t + 5t^3 \cos t + 3 \cos t - 3t \sin t - 30t^4$

* Calculons $\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}$?

$$\vec{V_1} \bigwedge \vec{V_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5t^3 & 3t & -2t^4 \\ \sin t & -\cos t & 3t \end{vmatrix} = (9t^2 - 2t^4 cost)\vec{i} - (15t^4 + 2t^4 sint)\,\vec{j} - (5t^3\,cost + 3t\,sint)\vec{k}$$

Donc : $\frac{d}{dt}\left(\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}\right) = (18\,t - 8t^3 cost + 2t^4 sint)\vec{i} - (60t^3 + 8t^3 sint + 2t^4 cost)\,\vec{j} - (15t^2\,cost - 5t^3 sint + 3\,sint\,3t\,cost)\vec{k}$ avec

* Calculons $\vec{V_1}.\vec{V_1}$?

$$\vec{V_1}.\vec{V_1} = \left(5t^3\,\vec{i} + 3t\,\vec{j} - 2t^4\,\vec{k}\right).\left(5t^3\,\vec{i} + 3t\,\vec{j} - 2t^4\,\vec{k}\right) = 25t^6 + 9t^2 + 4t^4 = 25t^6 + 4t^4 + 9t^2$$

Donc : $\frac{d}{dt}\left(\vec{V_1}.\vec{V_1}\right) = 150t^5 + 16t^3 + 18t$

Exercice N°4

On donne la fonction $x(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$.

1- Montrer que x(t) peut s'écrire encore sous la forme $x(t) = A\cos(\omega t - \varphi)$;

2- Etablir la relation entre x(t) et sa dérivée seconde par rapport au temps.

Correction de l'exercice N°4

$x(t) = Acos(\omega t - \varphi) = acos\omega t + bsin\omega t$ avec $a = Acos\varphi$ et $b = Asin\varphi$ donc $tan\varphi = \frac{b}{a}$, de plus $A^2 = a^2 + b^2$.

$\frac{dx}{dt} = -A\omega sin(\omega t - \varphi)$ et $\frac{d^2x}{dt^2} = -\,\omega^2 x$ d'où $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$: équation différentielle d'un oscillateur non amorti de pulsation propre ω.

Exercice N°5

Par rapport à un repère $\mathbf{R}(\mathbf{O},\vec{\mathbf{i}},\vec{\mathbf{j}},\vec{\mathbf{k}})$ orthonormé et direct, muni de la base $(\vec{\mathbf{i}},\vec{\mathbf{j}},\vec{\mathbf{k}})$, on considère les vecteurs : $\vec{\mathbf{A}} = \mathbf{3t^2}\vec{\mathbf{j}} + \mathbf{t}\vec{\mathbf{k}}$ **et** $\vec{\mathbf{B}} = -\mathbf{2}\vec{\mathbf{i}} + \mathbf{3t^3}\vec{\mathbf{j}}$

1- Calculer le produit scalaire $\vec{\mathbf{A}}.\vec{\mathbf{B}}$ et en déduire le cosinus de l'angle entre $\vec{\mathbf{A}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$ en fonction de **t**.

2- Déterminer les cosinus directeurs des vecteurs $\vec{\mathbf{A}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$

3- Calculer les composantes du vecteur $\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} \wedge \vec{\mathbf{B}}$ et son module.

4- Calculer le produit mixte $(\vec{\mathbf{A}},\vec{\mathbf{B}},\vec{\mathbf{C}})$ en utilisant les propriétés du produit mixte.

5- Calculer la valeur du double produit vectoriel $\vec{\mathbf{A}} \wedge (\vec{\mathbf{B}} \wedge \vec{\mathbf{C}})$, par deux méthodes différentes.

Correction de l'exercice N°5

1- Produit scalaire :

$$\vec{A}.\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3t^2 \\ t \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -2 \\ 3t^3 \\ 0 \end{pmatrix} = 9t^5$$

$$\cos\left(\vec{A},\vec{B}\right) = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|} = \frac{9t^5}{\sqrt{9t^4 + t^2}\,.\,\sqrt{4 + 9t^6}} = \frac{9t^4}{\sqrt{18t^8 + 9t^6 + 36t^2 + 4}}$$

2- Cosinus directeurs des vecteurs $\vec{A}$ *et* $\vec{B}$

$\cos\alpha_A = \vec{u}_A.\vec{i} = \dfrac{3t^2\,\vec{j} + t\,\vec{k}}{t\sqrt{9t^2+1}}\,.\,\vec{i} = 0$; $\cos\beta_A = \vec{u}_A.\vec{j} = \dfrac{3t^2\,\vec{j} + t\,\vec{k}}{t\sqrt{9t^2+1}}\,.\,\vec{j} = \dfrac{3t}{\sqrt{9t^2+1}}$

$\cos\gamma_A = \vec{u}_A.\vec{k} = \dfrac{1}{\sqrt{9t^2+1}}$; $\cos\alpha_B = \vec{u}_B.\vec{i} = \dfrac{-2\vec{i} + 3t^3\,\vec{j}}{\sqrt{4+9t^6}}\,.\,\vec{i} = -\dfrac{2}{\sqrt{4+9t^6}}$

$\cos\beta_B = \dfrac{3t^3}{\sqrt{4+9t^6}}$; $\cos\gamma_B = 0$

On vérifie que : $\cos^2\alpha_A + \cos^2\beta_A + \cos^2\gamma_A = 1$ et $\cos^2\alpha_B + \cos^2\beta_B + \cos^2\gamma_B = 1$

3- $\vec{C} = \vec{A}\wedge\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3t^2 \\ t \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2 \\ 3t^3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3t^4 \\ -2t \\ 6t^2 \end{pmatrix} = -3t^4\,\vec{i} - 2t\,\vec{j} + 6t^2\,\vec{k}$

$\left\|\vec{C}\right\| = \sqrt{9t^8 + 4t^2 + 36t^4}$

4- Le produit mixte : $\left(\vec{A}\,,\,\vec{B}\,,\vec{C}\right) = \vec{A}\,.\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)$

Par permutation circulaire :

$\left(\vec{A}\,,\,\vec{B}\,,\vec{C}\right) = \left(\vec{C},\,\vec{A}\,,\,\vec{B}\right) = \vec{C}\,.\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right) = \vec{C}\,.\,\vec{C} = \left\|\vec{C}\right\|^2 = 9t^8 + 4t^2\;\, 36t^4$

5- Double produit vectoriel

1ère méthode :

$\vec{A}\wedge\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right) = \left(\vec{A}.\vec{C}\right)\vec{B} - \left(\vec{A}.\vec{B}\right)\vec{C}$ or : $\vec{C} = \vec{A}\wedge\vec{B}$ donc : $\vec{A}.\vec{C} = 0$

Soit :

$\vec{A}\wedge\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right) = -\left(\vec{A}.\vec{B}\right)\vec{C} = -9t^5\left(-t^4\,\vec{i} - 2t\,\vec{j} + 6t^2\,\vec{k}\right) = 27t^9\,\vec{i} + 18t^6\,\vec{j} - 54t^7\,\vec{k}$

2ère méthode :

$$\vec{A}\wedge\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3t^2 \\ t \end{pmatrix} \wedge \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 3t^3 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -3t^4 \\ -2t \\ 6t^2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 3t^2 \\ t \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 18t^5 \\ 12t^2 \\ 4t + 9t^7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27t^9 \\ 18t^6 \\ -54t^7 \end{pmatrix}$$

$$= 27t^9\,\vec{i} + 18t^6\,\vec{j} - 54t^7\,\vec{k}$$

Exercice N°6

Dans un repère R(O, x, y, z), orthonormé direct, les coordonnés cartésiennes d'une particule M sont donnés par : $\begin{cases} x = 2t \\ y = 4\,t^2 - 4t \end{cases}$ t est le temps.

1- Déterminer l'équation de la trajectoire de M. Représenter l'allure de cette trajectoire.

2- Calculer le vecteur vitesse $\vec{V}(M)$. Représenter $\vec{V}(M)$.

2- Calculer le vecteur accélération $\vec{\gamma}(M)$. Représenter $\vec{\gamma}(M)$.

Correction de l'exercice N°6

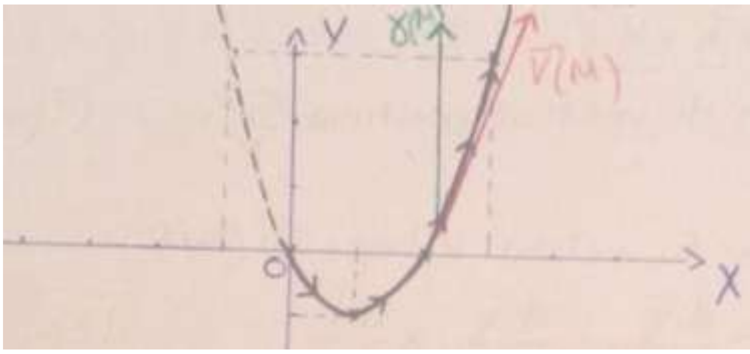
$$\begin{cases} x = 2t \quad (i) \\ y = 4t^2 - 4t \quad (ii) \end{cases}$$

1- y(t) = ?. on a (i) $\Longrightarrow t = \frac{x}{2}$

On remplace dans (ii) $y = 4 \times (\frac{x}{2})^2 - 4(\frac{x}{2})$

Donc $y = x^2 - 2x$. La trajectoire est une parabole.

* on remplace l'allure de cette trajectoire :



② On calcule le module du vecteur vitesse $\vec{V}(M)$:

$$\vec{V}(M) = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j}$$

donc $\boxed{\vec{V}(M) = 2\vec{i} + (8t-4)\vec{j}}$ La vitesse.

$$\Longrightarrow |\vec{V}(M)| = \sqrt{2^2 + (8t-4)^2} = \sqrt{64t^2 - 64t + 20}$$

donc $\boxed{|\vec{V}(M)| = 2\sqrt{16t^2 - 16t + 5}}$

* On représente $\vec{V}(M)$: "voir le dessin"

③ On trouve le vecteur accélération $\vec{\gamma}(M)$:

$$\vec{\gamma}(M) = \frac{d\vec{V}(M)}{dt} \Longleftrightarrow \boxed{\vec{\gamma}(M) = 8\vec{j}}$$

* On représente $\vec{\gamma}(M)$: "voir le dessin".

Exercice N°7

Dans le plan XOY du repère R(O, X, Y, Z), orthonormé direct une particule M est repérée par ses coordonnées polaires ρ et φ telles que $\begin{cases} \rho = 1 \\ \varphi = \frac{1}{2}\alpha\, t^2 \end{cases}$ (α est une constante positive)

1- Trouver l'expression de l'équation de la trajectoire de M en coordonnées cartésiennes. En déduire la nature de la trajectoire de M.

2- Dans la base $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi})$ associée au système de coordonnées polaires. Donner :

L'expression du vecteur position $\vec{OM}$;

L'expression du vecteur vitesse $\vec{V}(M/R)$, En déduire son module ;

L'expression du vecteur accélération $\vec{\gamma}(M)$. En déduire son module.

3- Calculer l'abscisse curviligne s(t) du point M sachant qu'à l'instant t = 0 ; s(0) = 0.

Correction de l'exercice N°7

$$\begin{cases} \rho = 1 \\ \varphi = \frac{1}{2}\alpha t^2 \end{cases}$$

"α est une constante po[sitive]" α > 0

① L'équation de la trajectoire de M en Coord. cartésiennes :

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \cos(\frac{1}{2}\alpha t^2) \\ y = \sin(\frac{1}{2}\alpha t^2) \end{cases}$$

- En général, l'équation d'un cercle est $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, $C(a,b)$

on a $x^2 + y^2 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \Longleftrightarrow \boxed{x^2 + y^2 = 1}$

donc la trajectoire est un cercle de centre $\boxed{(0,0)}$ et de rayon $\boxed{R = 1}$

② On donne l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$: $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$

$$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho = \vec{e}_\rho$$

* On donne l'expression du vecteur vitesse $\vec{V}(M/R)$:

$$\vec{V}(M/R) = \left.\frac{d(\overrightarrow{OM})}{dt}\right/_R = \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{e}_\rho}{d\varphi} \times \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{e}_\rho}{d} = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \qquad \frac{d\vec{e}_\varphi}{d} = -\dot{\varphi}\vec{e}_\rho}$$

$$\vec{V}(M/R) = \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

on a $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d(\frac{1}{2}\alpha t^2)}{dt} = \alpha t$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{V}(M/R) = \alpha t\,\vec{e}_\varphi} \Longrightarrow \boxed{|\vec{V}(M/R)| = \alpha t}$$

* On donne l'expression du vecteur accélération $\vec{\gamma}(M/R)$:

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d\vec{V}(M/R)}{dt} = \overbrace{\frac{d(\alpha t)}{dt}}^{=\alpha}\vec{e}_\varphi + \alpha t\overbrace{\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}}^{=-\dot{\varphi}\vec{e}_\rho}$$

$$= \alpha\vec{e}_\varphi - \alpha t\dot{\varphi}\vec{e}_\rho$$

Habib Kadi

donc $\boxed{\vec{\gamma}(M/R) = -(\alpha t)^2\vec{e}_\rho + \alpha\vec{e}_\varphi}$

$$|\vec{\gamma}(M/R)| = \sqrt{(\alpha t)^4 + \alpha^2} \Longrightarrow \boxed{|\vec{\gamma}(M/R)| = \alpha\sqrt{\alpha^2 t^4 + 1}}$$

③ On calcule l'abscisse curviligne $s(t)$ du M :

Solution 1 :

$$V = \frac{ds}{dt} \Longrightarrow \alpha t = \frac{ds}{dt}$$

$$\Longrightarrow \int_{s(0)=0}^{s(t)} ds = \int_0^t \alpha t\, dt$$

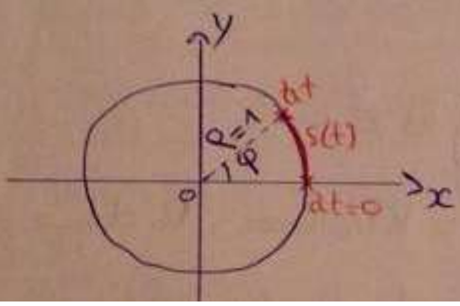
donc $s(t) - s(0) = \frac{1}{2}\alpha t^2 \Longleftrightarrow \boxed{s(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2}$

Solution 2 :

$$\int ds = \int \alpha t\, dt \Longleftrightarrow s(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 + c^{te}$$

à $t = 0$, $s(0) = 0 + c^{te} = 0 \Longrightarrow c^{te} = 0 \Longrightarrow \boxed{S = \frac{1}{2}\alpha t^2}$

Solution 3 :



$$s(t) = \rho\varphi$$

$$\boxed{s(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2}$$

Exercice N°8

Un point **M** est repéré dans **(xOy)** par les coordonnées polaires, $\boldsymbol{\rho(t)} = \|\overrightarrow{\mathbf{OM}}\|$ et $\boldsymbol{\theta(t)} = (\widehat{\overrightarrow{\mathbf{OM}}, \overrightarrow{\mathbf{O}}\mathbf{x}})$. Soit $\vec{\mathbf{u}}$ le vecteur unitaire de même direction et sens que $\overrightarrow{\mathbf{OM}}$.

1- Tracer dans le plan **(xOy)** le point **M** en y précisant les coordonnées polaires $\boldsymbol{\rho}$ et $\boldsymbol{\theta}$;

2- Ecrire l'expression de $\vec{\mathbf{u}}$ dans la base ($\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$) ;

3- Calculer la dérivée de $\vec{\mathbf{u}}$ par rapport à $\boldsymbol{\theta}$; on note $\vec{\mathbf{v}}$ ce vecteur ;

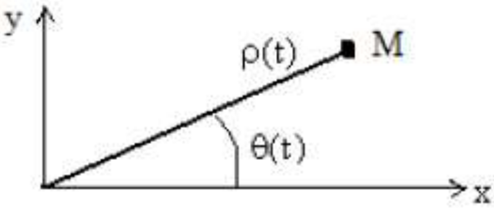
4- Calculer le produit scalaire des vecteurs $\vec{\mathbf{u}}$ et $\vec{\mathbf{v}}$; conclure ;

5- Calculer la dérivée de $\vec{\mathbf{v}}$ par rapport à $\boldsymbol{\theta}$ que constater vous ?

6- Calculer les dérivées première et seconde par rapport au temps de $\vec{\mathbf{u}}$.

Correction de l'exercice N°8

1- Traçage du point **M** , dans le plan **(xOy),** en précisant les coordonnées polaires $\boldsymbol{\rho}$ et $\boldsymbol{\theta}$



2- L'expression de $\vec{\mathbf{u}}$ dans la base ($\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$)

$$\boldsymbol{\vec{u} = cos\theta\vec{i} + sin\,\theta\,\vec{j}.}$$

3- On calcul la dérivée de $\vec{\mathbf{u}}$ par rapport à $\boldsymbol{\theta}$; on note $\vec{\mathbf{v}}$ ce vecteur

$$\vec{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\frac{d\vec{u}}{d\theta} = -sin\,\theta\,\vec{i} + \; cos\theta\,\vec{j}}$$

4- Calcul du produit scalaire des vecteurs $\vec{\mathbf{u}}$ et $\vec{\mathbf{v}}$

On vérifie que $\vec{u}.\vec{v} = 0$ donc tout vecteur unitaire est orthogonal à son vecteur dérivée

5- Calcul de la dérivée de $\vec{\mathbf{v}}$ par rapport à $\boldsymbol{\theta}$

$$\boldsymbol{\frac{d\vec{v}}{d\theta} = -cos\,\theta\,\vec{i} - sin\theta\,\vec{j} = -\,\vec{u}}$$

Ce vecteur est perpendiculaire à $\vec{\mathbf{v}}$ donc parallèle à $\vec{\mathbf{u}}$

6- Calcul des dérivées première et seconde par rapport au temps de $\vec{\mathbf{u}}$.

$$\frac{\mathbf{d\vec{u}}}{\mathbf{dt}} = \dot{\boldsymbol{\theta}}\vec{\mathbf{v}} \qquad \text{et} \qquad \frac{d^2\vec{u}}{dt^2} = \ddot{\theta}\vec{v} - \dot{\theta}^2\vec{u}$$

Exercice N°9 : Différentielle et dérivée d'un vecteur unitaire (Facultatif)

Considérons la position d'un point M dans le repère R(O, xyz).

Soient $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi}, \vec{k})$ et $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$ respectivement les bases cartésienne, cylindrique et sphérique associées à ce repère.

1. Calculer : $\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{d\varphi}$, $\frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{d\varphi}$ et $\frac{d\vec{k}}{d\varphi}$

2. En déduire $d\overrightarrow{e_\rho}$ et $d\overrightarrow{e_\varphi}$ dans la base cartésienne.

3. Montrer que les différentielles des vecteurs de la base cylindrique peuvent se mettre sous la forme :

$$d\overrightarrow{e_\rho} = dt\;\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{e_\rho} \qquad \text{et} \qquad d\overrightarrow{e_\varphi} = dt\;\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{e_\varphi}$$

Déduire les dérivées par rapport au temps des vecteurs de la base cylindrique dans R.

4. Quel est le vecteur rotation de la base sphérique par rapport à R?

En utilisant les résultats de la question précédente, déduire les expressions de :

$$\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} \;,\; \frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt} \;\text{et}\; \frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{dt}$$

Correction de l'exercice N°9

1. Exprimons d'abord les vecteurs de la base cylindrique dans la base cartésienne :

$$\begin{aligned}\vec{e_\rho} &= \cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}\\ \vec{e_\varphi} &= -\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}\\ \vec{k} &= \vec{k}.\end{aligned}$$

Sachant que la base cartésienne est une base fixe, alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial\vec{e_\rho}}{\partial\varphi} &= -\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j} = \vec{e_\varphi}\\ \frac{\partial\vec{e_\varphi}}{\partial\varphi} &= -\cos\varphi\vec{i} - \sin\varphi\vec{j} = -\vec{e_\rho}\\ \frac{\partial\vec{k}}{\partial\varphi} &= \vec{0}.\end{aligned}$$

2. Sachant que $\overrightarrow{e_\rho}$ et $\overrightarrow{e_\varphi}$ ne dépendent que de φ, leurs différentielles sont données

$$\begin{aligned}d\vec{e_\rho} &= \frac{\partial\vec{e_\rho}}{\partial\varphi}d\varphi = d\varphi\vec{e_\varphi}\\ d\vec{e_\varphi} &= \frac{\partial\vec{e_\varphi}}{\partial\varphi}d\varphi = -d\varphi\vec{e_\rho}.\end{aligned}$$

3. Comme la base $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi}, \vec{k})$ est une base directe alors $\overrightarrow{e_\varphi} = \vec{k} \wedge \overrightarrow{e_\rho}$ et $\overrightarrow{e_\rho} = \overrightarrow{e_\varphi} \wedge \vec{k}$.
En utilisant ces deux résultats, nous obtenons

$$d\vec{e_\rho} = d\varphi\vec{e_\varphi} = dt\frac{d\varphi}{dt}\vec{k} \wedge \vec{e_\rho} = dt\vec{\Omega} \wedge \vec{e_\rho}$$

avec $\vec{\Omega} = \dot{\varphi}\,\vec{k}$. De même, on peut écrire

$$d\vec{e_\varphi} = -d\varphi\vec{e_\rho} = dt\frac{d\varphi}{dt}\vec{k} \wedge \vec{e_\varphi} = dt\vec{\Omega} \wedge \vec{e_\varphi}.$$

D'où les résultats recherchés.
Ce qui donne les dérivées par rapport aux temps de $\overrightarrow{e_\rho}$ et de $\overrightarrow{e_\varphi}$

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{e_\rho}}{dt} &= \vec{\Omega} \wedge \vec{e_\rho}\\ \frac{d\vec{e_\varphi}}{dt} &= \vec{\Omega} \wedge \vec{e_\varphi}.\end{aligned}$$

Pour dériver par rapport au temps dans un repère R un vecteur unitaire, il suffit de connaitre son vecteur rotation dans R et utiliser le résultat précédent.
4. Pour déterminer le vecteur rotation d'une base, la méthode directe est celle utilisée dans l'exercice précédent. Il suffit de prendre un vecteur de la base[1] et de mettre sa dérivée sous la forme qui met en évidence le vecteur rotation.
Une deuxième approche qualitative consiste à procéder comme suit
i- repérer chaque angle qui décrit la rotation[2] du vecteur considéré : dans le cas précédent c'est φ ;
ii- repérer le plan dans lequel chaque rotation a lieu et le vecteur rotation qui lui est associé est porté par le vecteur unitaire perpendiculaire au plan en appliquant la règle du tire-bouchon : dans le cas précédent c'est $\vec{k}$;
iii- le vecteur rotation est alors la somme de tous les vecteurs décrivant chacune des rotations : dans le cas précédent, il s'agit d'une seule et le vecteur rotation est $\vec{\Omega} = \dot{\varphi}\,\vec{k}$.
Notons que le module du vecteur rotation associé à un angle est donné par la vitesse angulaire associée à cet angle. Aussi, dans le cas de la base sphérique, on prend $\overrightarrow{e_r}$ et sa rotation est repérée par les angles
i- φ : rotation dans le sens trigonométrique dans le plan perpendiculaire à $\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{\Omega_1} = \dot{\varphi}\,\vec{k}$;
ii- θ : rotation dans le sens trigonométrique dans le plan perpendiculaire à $\overrightarrow{e_\varphi}\ \overrightarrow{\Omega_2} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\varphi}$
et le vecteur rotation de $\overrightarrow{e_r}$ dans R est $\vec{\Omega} = \dot{\varphi}\,\vec{k} + \dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\varphi}$ et qui est par la même occasion le vecteur rotation de la base sphérique dans R.
En utilisant le résultat de la question précédente, nous obtenons

$$\frac{d\vec{e_r}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{e_r} = \left(\dot{\varphi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{e_\varphi}\right) \wedge \vec{e_r}.$$

Or $\vec{k} = \cos\theta\overrightarrow{e_r} - \sin\theta\overrightarrow{e_\theta}$, ce qui donne $\vec{k} \wedge \overrightarrow{e_r} = (\cos\theta\overrightarrow{e_r} - \sin\theta\overrightarrow{e_\theta}) \wedge \overrightarrow{e_r} = \sin\theta\overrightarrow{e_\varphi}$ et $\overrightarrow{e_\varphi} \wedge \overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{e_\theta}$ ce qui implique

$$\frac{d\vec{e_r}}{dt} = \dot{\varphi}\sin\theta\vec{e_\varphi} + \dot{\theta}\vec{e_\theta}.$$

De la même manière, nous avons

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{e_\theta}}{dt} &= \vec{\Omega} \wedge \vec{e_\theta} = \left(\dot{\varphi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{e_\varphi}\right) \wedge \vec{e_\theta} \\ &= \dot{\varphi}\cos\theta\vec{e_\varphi} - \dot{\theta}\vec{e_r}.\end{aligned}$$

Nous avons utilisé $\vec{k} \wedge \overrightarrow{\mathrm{e_r}} = sin\theta\overrightarrow{\mathrm{e_\varphi}}$. Et enfin,

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{e_\varphi}}{dt} &= \vec{\Omega} \wedge \vec{e_\varphi} = \left(\dot{\varphi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{e_\varphi}\right) \wedge \vec{e_\varphi} \\ &= \dot{\varphi}\left(\cos\theta\vec{e_r} - \sin\theta\vec{e_\theta}\right) \wedge \vec{e_\varphi} = -\dot{\varphi}\left(\cos\theta\vec{e_\theta} + \sin\theta\vec{e_r}\right)\end{aligned}$$

[1]. un parmi ceux qui sont mobiles. Dans l'exemple précédent, on ne peut pas prendre $\vec{k}$ car il est fixe.
[2]. on peut avoir le cas où plusieurs angles sont mis en jeu, c'est le cas de la base sphérique.