

Série N°2 : Cinématique sans et avec changement de référentiel

Exercice N°1

On considère un point matériel M se déplaçant dans le plan (Oxy) et $R(O, x, y, z)$ est un référentiel muni de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les coordonnées du point M dans R sont données par :

$$x(t) = t + 1 \quad ; \quad y(t) = t^2 + 1 \quad \text{et} \quad z(t) = 0, \quad (t \text{ étant le temps})$$

- 1- Donner l'équation de la trajectoire de M dans R . En déduire sa nature ;
- 2- Calculer la vitesse $\vec{v}(M/R)$ et l'accélération $\vec{a}(M/R)$ du point M .
- 3- Déterminer les vecteurs unitaires $\vec{t}$ tangent à la trajectoire, La normale $\vec{n}$ et la binormale $\vec{b}$ de la base de Frenet,
- 4- En Déduire le rayon de courbure ρ .

Exercice N°2

On considère une courbe (C) sur laquelle se déplace un point matériel M d'abscisse curviligne $s(t)$. Le vecteur vitesse du point M dans un repère orthonormé direct $R(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est $\vec{v}(M/R)$ de module V . On définit la base locale (ou base de Frenet) $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ telle que $\vec{v}(M/R) = V\vec{t}$.

- 1- Que désignent les vecteurs $\vec{t}$, $\vec{n}$ et $\vec{b}$?
- 2- Quelle relation existe - t - il entre $s(t)$ et V ?
- 3- Montrer que le vecteur accélération du point M dans le repère $\mathcal{R}$ est donné par : $\vec{a}(M) = \frac{dV}{dt}\vec{t} + \frac{V^2}{R}\vec{n}$
 R_c étant le rayon de courbure de la trajectoire (C) au point M .
- 4- Exprimer R_c en fonction de $\vec{v}(M/R)$ et $\vec{a}(M)$.

Exercice N°3 : Mouvement elliptique

Soit un point M en mouvement dans le plan xOz d'un référentiel $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. L'équation paramétrique du mouvement est : $x(t) = 2\cos\omega t$ et $y(t) = 3\sin\omega t$

- 1- Trouver la nature de la trajectoire.
- 2- Ecrire les vecteurs position, vitesse et accélération du point M .
- 3- Tracer la trajectoire dans le plan xOy et préciser en un point d'abscisse positif puis en un autre point d'abscisse négatif le vecteur vitesse et le vecteur accélération de M . Tracer les accélérations normale et tangentielle en ces deux points.

Exercice N°4 : La ronde d'un poisson rouge

Un poisson rouge se promène dans son bocal. Le mouvement de son centre d'inertie M dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est décrit par les équations paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = R\cos(\omega t) \\ y(t) = R\sin(\omega t) \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

(ω et R désignent deux constantes positives)

1. Etablir l'équation paramétrique de la trajectoire du centre d'inertie du poisson et préciser sa nature.
2. Déterminer le vecteur vitesse correspondant (cartésienne). Calculer sa norme. Quelle caractéristique le mouvement présente-t-il et que représente la constante ω ?
3. Etablir une relation simple entre les vecteurs position $\vec{OM}$ et accélération $\vec{a}$ (toujours en cartésienne)
4. Refaire tous ces calculs en coordonnées polaires : trouver les expressions de r et de θ , puis de $\vec{v}$ et de $\vec{a}$ et la relation entre $\vec{OM}$ et $\vec{a}$.
5. Las d'effectuer toujours le même trajet, le poisson décide d'ajouter une petite composante verticale $z(t) = vt$ au mouvement précédent (v_0 est une constante positive). Quelle est alors la nature du mouvement du centre d'inertie du poisson ?



6. Et si il rajoute une composante $z(t) = z_0 \cos \omega zt$?

Quelle est la nature du mouvement ?

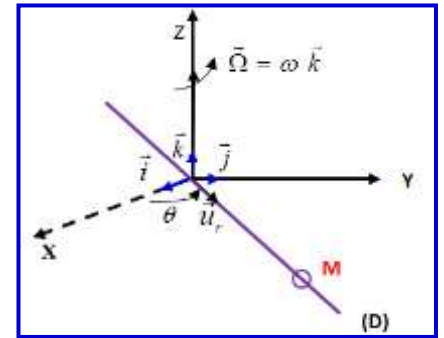
Exercice N°5

Dans le plan xOy , une droite Ox' tourne autour de Oz avec une vitesse angulaire constante. Un mobile M se déplace sur la droite Ox' suivant la loi : $r = a \sin \theta$ avec $\theta = \omega t$ et $a = \text{cte}$.

1. Déterminer à l'instant t en fonction de a et ω , la vitesse relative et la vitesse d'entraînement de M par leurs projections dans le repère mobile $x'Oy'$. En déduire la vitesse absolue exprimée dans cette même base de projection, et montrer que le module de celle-ci est constant.
2. Déterminer à l'instant t en fonction de a et ω , l'accélération relative, l'accélération d'entraînement et l'accélération complémentaire de M par leurs projections dans le repère mobile $x'Oy'$. En déduire l'accélération absolue exprimée dans cette même base de projection, et montrer que le module de celle-ci est constant.

Exercice N°6

Un anneau de faibles dimensions, assimilable à un point matériel M de masse m , glisse sans frottement sur une tige rigide (D) la tige (d) tourne autour de l'axe (Oz) avec la vitesse angulaire $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, ou θ représente un angle orienté $(\vec{i}, \vec{u}_r)$ et $\vec{u}_r$ est un vecteur unitaire de (D) (Voir figure).



Le mouvement du point M sur la droite (D) est décrit par l'équation horaire :

$$r = r_0(1 + \sin \omega t), \text{ ou } r_0 \text{ est constante positive et } \vec{r} = \overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r.$$

On appelle mouvement relatif de M son mouvement sur la droite (D) , et mouvement absolu son mouvement par rapport au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Déterminer pour M , dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.

- 1- La vitesse et l'accélération relatives.
- 2- La vitesse et l'accélération d'entraînement.
- 3- L'accélération de Coriolis.

Exercice N°7

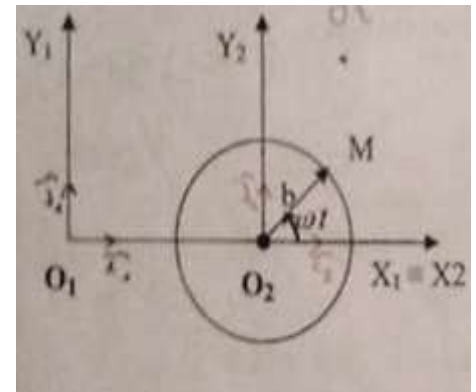
On considère le repère fixe $R_1(O_1, X_1, Y_1, Z_1)$ orthonormé direct, et le référentiel relatif $R_2(O_2, X_2, Y_2, Z_2)$ muni d'une base $(\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$ orthonormée directe. Le repère R_2 est en mouvement de translation rectiligne tel qu'à chaque instant t :

$$\overrightarrow{O_1O_2} = \frac{1}{2}at^2 \vec{i}_2 \text{ (a est une constante positive). Une particule M est repérée dans}$$

R_2 par son vecteur position $\overrightarrow{O_2M} = b \cos \omega t \vec{i}_2 + b \sin \omega t \vec{j}_2$ (b et ω sont des constantes positives).

Déterminer dans la base $(\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$

- 1- La vitesse relative $\vec{V}_r$ et l'accélération relative $\vec{\gamma}_r$ de M .
- 2- La vitesse d'entraînement $\vec{V}_e$ de M .
- 3- les accélérations d'entraînement $\vec{\gamma}_e$ et de coriolis $\vec{\gamma}_c$.
- 4- En déduire la vitesse absolue $\vec{V}_a$ et l'accélération absolue $\vec{\gamma}_a$.
- 5- Que peut-on dire des accélérations $\vec{\gamma}(M/R_1)$ et $\vec{\gamma}(M/R_2)$ dans le cas où la translation de R_2 par rapport à R_1 est uniforme ? Conclure.



Exercice N°8

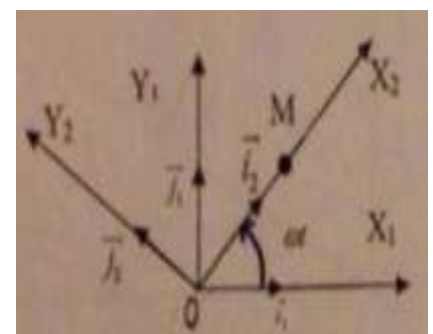
On considère un repère absolu $R_1(O_1, X_1, Y_1, Z_1)$ de base orthonormé directe $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$, et un repère relatif $R_2(O_2, X_2, Y_2, Z_2)$ de la base $(\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$ orthonormée directe.

L'axe $\overrightarrow{OX_2}$ tourne autour de $\overrightarrow{OZ}$ avec une vitesse angulaire ω constante ($\vec{\omega} = \omega \vec{i}_1$)

La position d'une particule M sur l'axe $\overrightarrow{OX_2}$ est donnée par $\overrightarrow{OM} = a \cos \omega t \vec{i}_2$ (a est une constante positive).

1 - Dans la base $(\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$, exprimer :

- 1- La vitesse relative $\vec{V}_r$ et l'accélération relative $\vec{\gamma}_r$ de M .
- 1- 2- La vitesse d'entraînement $\vec{V}_e$ et accélération d'entraînement $\vec{\gamma}_e$.



1- 3- L'accélération de coriolis $\overrightarrow{\gamma_c}$.

1- 4- La vitesse absolue $\overrightarrow{V_a}$ et l'accélération absolue $\overrightarrow{\gamma_a}$.

2- Dans la base $(\overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{j_1}, \overrightarrow{k_1})$, déterminer les coordonnées x_1 et y_1 de M.

En déduire l'équation de la trajectoire de M dans R_1 . Quelle est la nature de cette trajectoire ?

On donne : $\cos^2 \omega t = \frac{1 + \cos 2\omega t}{2}$ et $\cos \omega t \times \sin \omega t = \frac{\sin 2\omega t}{2}$.