

Série N°3 : Dynamique et Aspects Energétiques

Exercice N°1

Par rapport à un référentiel orthonormé direct galiléen $R_0(O, X_0, Y_0, Z_0)$, un repère relatif est en mouvement de rotation autour de l'axe vertical OZ_0 avec une vitesse angulaire constante $\vec{\omega} = \omega \vec{k}_0$.

On désigne par $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}_0)$ la base orthonormée directe associée au repère relatif $R(O, X, Y, Z_0)$.

Un point matériel M, de masse m, se déplace sans frottement sur l'axe rigide OY.

1- Exprimer dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}_0)$ toutes les forces exercées sur M dans le repère relatif R.

2- Ecrire l'expression vectorielle de la relation fondamentale de la dynamique appliquée à M dans R.

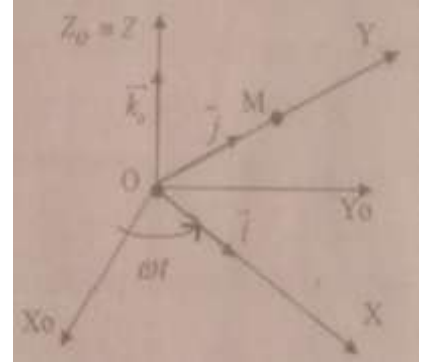
3- Donner les équations des projections orthogonales de cette relation fondamentale suivant les 3 axes de R.

4- Trouver l'équation horaire $y(t)$ du mouvement de M sur l'axe OY, sachant qu'à l'instant initial $t = 0 : y(t) = y_0$ et $\frac{dy(0)}{dt} = 0$

La solution de l'équation différentielle et $\frac{d^2y}{dt^2} - \omega^2 y = 0$ est donnée par : $y = Ae^{\omega t} + B e^{-\omega t}$.

A et B sont des constantes à déterminer à partir des conditions initiales.

5- Dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}_0)$, exprimer la réaction $\vec{R}$ exercée par l'axe OY sur le point matériel M.



Exercice N°2

Soit $R(O, xyz)$ un référentiel terrestre supposé galiléen. L'axe Oz est dirigé suivant la verticale ascendante. Un anneau M considéré comme un point matériel de masse m glisse sans frottement sur une tige horizontale Ox_1 . Cette tige tourne à vitesse angulaire constante ω autour de Oz. La position de l'anneau M sur la tige est repérée à tout instant par le rayon vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x_1(t)\vec{i}$. Le mouvement a lieu sous les conditions initiales suivantes : à $t = 0, x_1 = a$ et $\dot{x}_1 = 0$. On appellera $R_1(O, x_1y_1z_1=Z)$ le référentiel lié à la tige portant l'anneau.

1- Faire une figure représentative du phénomène.

2- Quelles sont les forces usuelles qui agissent sur le point M dans $R(Oxyz)$ puis dans $R_1(O, x_1y_1z_1)$.

3- Ecrire l'équation vectorielle du mouvement déduite du PFD dans R_1 .

4- Quelles est la nature du mouvement de l'anneau dans R_1 .

5- Calculer les expressions des forces d'inertie.

6- Montrer que l'équation horaire du mouvement dans R_1 est $x_1(t) = ach\omega t$ et trouver l'expression de la réaction $\vec{R}$ de la tige sur l'anneau.

Exercice N°3

Donner l'équation du mouvement en coordonnées polaires (r, θ) d'un pendule simple de masse m et de longueur $L(t) = at + b$:

1- En utilisant le principe fondamental de la dynamique ; calculer dans ce cas la tension du fil T.

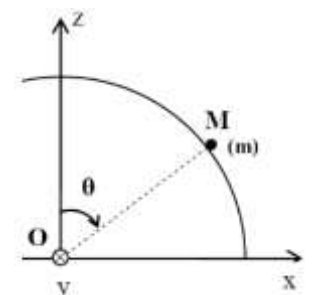
2- En utilisant le théorème de l'énergie cinétique ; traiter le cas où $L = b$.

Exercice N°4

Une masse m glisse à partir d'un point A et sans vitesse initial sur une surface formée par une sphère de rayon a et de centre O on négligera les frottements.

1- En utilisant les coordonnées FRENET et le Principe fondamentale de la dynamique, déterminer l'expression de la vitesse de la masse m puis déduire l'expression de la réaction R de la surface sur la masse, est-il possible que m quitte la surface.

2- En utilisant le théorème du moment cinétique et les coordonnées intrinsèques (base de Frenet) l'expression de la vitesse de la masse m



Exercice N°5

Un point matériel M de masse m parcourt dans le référentiel $R(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, une trajectoire plane d'équation paramétrique : $x(t) = \omega t$ et $y(t) = A \cos(\omega t)$.

- 1/ Trouver l'équation de la trajectoire. Quelle est sa nature ?
- 2/ Ecrire l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$. En déduire l'expression de la vitesse $\vec{V}(M/R)$ puis l'expression de l'accélération $\vec{\gamma}(M/R)$.
- 3/ Tracer l'allure de la trajectoire dans le plan xOy . Représenter en un point maximum de la trajectoire le vecteur vitesse et le vecteur accélération. Trouver les expressions des accélérations normale $\vec{\gamma}_n$ et tangentielle $\vec{\gamma}_t$ en ce point maximum choisi.
- 4/ Calculer la résultante $\vec{F}$ des forces appliquées au point M lors de son mouvement.
- 5/ Calculer son énergie cinétique $E_c(M/R)$.

Exercice N°6

Une masse m glisse sans vitesse initiale d'un point A dans un demi-cercle de rayon R figure.

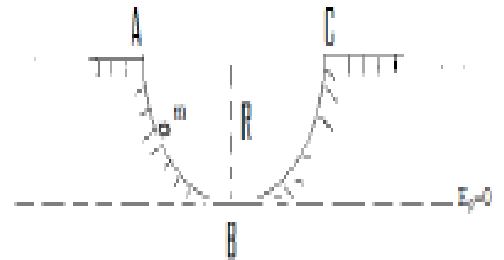
I - Si on néglige les frottements :

- 1- Est-ce que l'énergie totale (mécanique) de la masse se conserve durant son mouvement ?
- 2- déterminer sa vitesse au point B .
- 3- A quelle hauteur h_1 la masse atteint ?

II- si on a la présence de frottements sur l'arc AB et la vitesse de la masse au point B vaut $\sqrt{gR}$, calculer le travail des forces de frottements. A quelle hauteur h_2 la masse atteint si l'arc BC est lisse (pas de frottements).

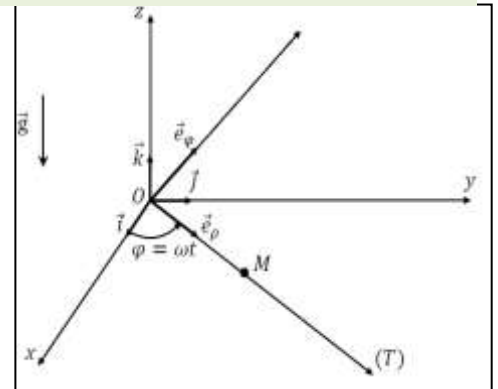
III- si on suppose qu'on se trouve dans le 2^{ème} cas, et la masse m démarre avec une vitesse initiale V_0 . On remarque qu'elle arrive au point C avec une vitesse nulle.

- déterminer le travail de la force de frottement. Calculer la vitesse de la masse au point B .



Exercice N°8

Soit $\mathcal{R}(O,xyz)$ un référentiel orthonormé direct et Galiléen, muni de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit M un point matériel de masse m . Le point M glisse sans frottement le long de la tige (T) qui tourne dans le plan horizontal (xoy) autour de l'axe (Oz) avec une vitesse angulaire constante ω ($\varphi = \omega t$ et $\omega > 0$). M est soumis, en plus de son poids $\vec{P}$ et de la réaction de la tige $\vec{R}$, à une force $\vec{F} = F \vec{e}_\rho$. Dans ces conditions, le mouvement de M le long de la tige suit la loi $\overrightarrow{OM} = at \vec{e}_\rho$, (t étant le temps et a une constante positive). $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ est la base cylindrique liée à la tige.



N.B : Toutes les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$.

- 1- Calculer la vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ et l'accélération $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$ de M dans $\mathcal{R}$ en fonction de a , t et ω .
- 2- Déterminer $\vec{\sigma}_O(M/\mathcal{R})$ le moment cinétique en O du point M ainsi que sa dérivée par rapport au temps dans $\mathcal{R}$.
- 3- Déterminer les moments de chacune des forces agissant sur le point M .
- 4- En appliquant le théorème du moment cinétique, trouver les expressions des composantes de $\vec{R}$.
- 5- Déterminer $(M/\mathcal{R})$ l'énergie cinétique du point M dans $\mathcal{R}$ ainsi que sa dérivée par rapport au temps dans $\mathcal{R}$.
- 6- Déterminer les puissances de chacune des forces agissant sur le point M .
- 7- En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, trouver l'expression de $\vec{F}$.