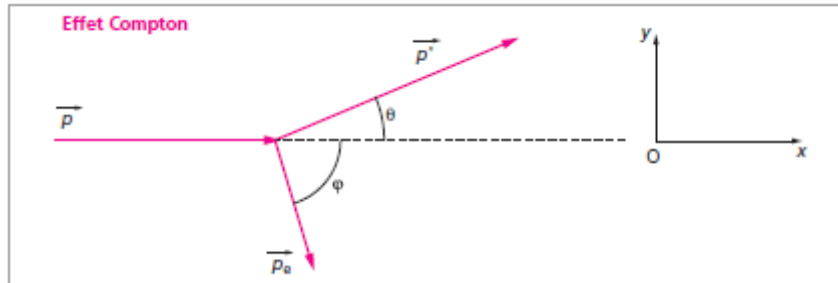


Mécanique quantique – SMC
Série N° 2

(2014 – 2015)

Solution de l'exercice N° 1 : Effet Compton



1. Soit E' l'énergie du photon diffusé : $E' = h\nu'$

La conservation de l'énergie totale impose : $E = E' + E_C$

Soient $\vec{p}$, $\vec{p}'$ et $\vec{p}_e$ les impulsions respectivement des photons incident et diffusé et de l'électron diffusé. On a :

$$E = pC \quad \text{et} \quad E' = p'C$$

La conservation de l'impulsion impose : $\vec{p} = \vec{p}' + \vec{p}_e$

En projetant cette égalité sur les axes Ox et Oy, il vient :

$$E = E' \cos \theta + p_e C \cos \varphi$$

$$0 = E' \sin \theta - p_e C \sin \varphi$$

On élimine φ :

$$p_e C \cos \varphi = E - E' \cos \theta$$

$$p_e C \sin \varphi = E' \sin \theta$$

$$p_e^2 C^2 = (E - E' \cos \theta)^2 + E'^2 \sin^2 \theta = E^2 + E'^2 - 2EE' \cos \theta \quad (1)$$

Éliminons maintenant p_e grâce à $(E_C + m_e C^2)^2 = p_e^2 C^2 + m_e^2 C^4$

Posons $E_0 = m_e C^2$. On a alors $p_e^2 C^2 = E_C^2 + 2E_0 E_C$

Or $E_C = E - E'$

Donc

$$p_e^2 C^2 = E^2 + E'^2 - 2EE' + 2E_0(E - E') \quad (2)$$

$$(1) - (2) \Rightarrow 2EE'(1 - \cos \theta) = 2E_0 E - 2E_0 E'$$

$$E' = \frac{E_0 E}{E(1 - \cos \theta) + E_0}$$

$$E_C = E - \frac{E_0 E}{E(1 - \cos \theta) + E_0} = \frac{E^2(1 - \cos \theta) + E E_0 - E_0 E}{E(1 - \cos \theta) + E_0} = \frac{E(1 - \cos \theta)}{(1 - \cos \theta) + E_0}$$

D'où

$$= \frac{E}{1 + \frac{m_e C^2}{E(1 - \cos \theta)}}$$

E_C est maximale lorsque $(1 - \cos \theta)$ est maximal, c'est-à-dire égal à 2 ($\theta = \pi$).

A.N. $E_{C\max} = 1,8 \text{ MeV}$: L'électron emporte presque toute l'énergie du photon.

$\theta = \pi \rightarrow \varphi = 0$: l'électron part dans la direction et le sens du photon incident. Le photon est rétrodiffusé.

2. Cette question est indépendante de la première et constitue une question « classique » de l'effet Compton. On reprend les notations utilisées au 1 en les complétant avec E_e l'énergie de l'électron diffusé.

$$E_e = E_C + m_e C^2 = \sqrt{p_e^2 C^2 + m_e^2 C^4}$$

$$\text{D'autre part : } \vec{p} = \vec{p}' + \vec{p}_e \Rightarrow \vec{p}_e = \vec{p} - \vec{p}' \Rightarrow p_e^2 = p^2 + p'^2 - 2pp' \cos \theta$$

$$p_e^2 C^2 = (h\nu)^2 + (h\nu')^2 - 2h^2 \nu \nu' \cos \theta \quad (3)$$

La conservation de l'énergie totale peut s'écrire :

$$\text{Or} \quad E_C = E - E'$$

$$h\nu + m_e C^2 = h\nu' + \sqrt{p_e^2 C^2 + m_e^2 C^4}$$

$$\text{D'où} \quad p_e^2 C^2 = (h\nu)^2 + (h\nu')^2 - 2h^2 \nu \nu' + 2m_e C^2 (h\nu - h\nu') \quad (4)$$

$$(3) \text{ et } (4) \Rightarrow h^2 \nu \nu' = m_e C^2 (h\nu - h\nu')$$

$$\text{Or} \quad \lambda = \frac{C}{\nu}$$

$$\text{Donc} \quad \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e C} (1 - \cos \theta)$$

$$\text{La longueur d'onde de Compton de l'électron : } \lambda_{ce} = \frac{h}{m_e C}$$

$$\text{A. N : } \lambda_{ce} = 2.43 \times 10^{-12} \text{ m}$$

Solution de l'exercice N° 2 : Effet Compton

1- Le changement de longueurs d'onde des photons diffusé à un angle de 45° .

$$\Delta \lambda = \frac{h}{m_e C} (1 - \cos \theta) \quad \text{AN} \quad \Delta \lambda = 0.0007106 \text{ nm}$$

2- La longueur d'onde des photons diffusés à 45° .

$$\lambda' = \lambda + \Delta \lambda \Rightarrow \lambda' = \frac{hC}{E} + \Delta \lambda \quad \text{AN} \quad \lambda' = 0.0207106 \text{ nm}$$

3- L'énergie (en keV) des photons diffusés à 45° .

$$E' = h\nu' = \frac{hC}{\lambda'} \quad \text{AN} \quad E' = 59.873 \text{ keV}$$

4- L'énergie cinétique des électrons après qu'ils aient provoqué la diffusion des photons avec un angle de 45° .

$$E_C = \frac{E}{1 + \frac{m_e C^2}{E(1 - \cos \theta)}} \quad \text{AN} \quad E_C = 2127 \text{ eV}$$

6- L'angle avec lesquelles projetés les électrons après qu'ils aient provoqué la diffusion des photons avec un angle de 45° (Angle Φ sur la figure).

$$\text{Cotg} \Phi = (1 + \alpha) \text{tg} \frac{\theta}{2} \quad \text{avec } \alpha = \frac{h\nu}{m_e C^2} \quad \text{AN} \quad \Phi = 65.1^\circ$$

Solution de l'exercice N° 3 : Atomes de Bohr hydrogéoïdes

1- Le rayon de l'orbite de l'électron dans l'état $n = 3$.

$$r = \frac{n^2}{z} a_B = \frac{n^2}{z} \frac{\hbar^2 C^2}{k e^2 m_e C^2} \quad \text{AN} \quad r = 0.022 \text{ nm}$$

2- Quelle est l'énergie de l'état $n = 3$, en eV.

$$E_n = -\frac{Z^2}{n} E_R \quad \text{AN} \quad E_n = -730 \text{ eV}$$

3- La longueur d'onde du photon émis au cours de la transition du niveau $n = 3$ au niveau $n = 1$ de cet atome.

$$\frac{1}{\lambda} = -\frac{Z^2}{hc} E_R \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad \text{AN} \quad \lambda \approx 0.21 \text{ nm}$$

Exercice N° 4 :

1- Le changement de longueur d'onde est $\Delta\lambda = 2.43 \times 10^{-3} \text{ nm} (1 - \cos 30^\circ) = 3.2 \times 10^{-4} \text{ nm}$
(Remarquez que toutes les ondes électromagnétiques subissent ce changement de longueur d'onde. On peut cependant dire qu'un tel changement ne serait pas facilement observable pour de la lumière visible vu la faiblesse du changement.)

La nouvelle longueur d'onde est donc $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda = 0.01 \text{ nm} + 0.00032 = 0.01032 \text{ nm}$

2- L'énergie avant la collision est

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240 \text{ eV.nm}}{0.01 \text{ nm}} = 124 \text{ keV}$$

L'énergie après la collision est

$$E_\gamma' = \frac{hc}{\lambda'} = \frac{1240 \text{ eV.nm}}{0.01032 \text{ nm}} = 120.55 \text{ keV}$$

On voit que le photon a perdu un peu d'énergie lors de la collision.

3- On trouve l'énergie de l'électron avec la formule de la conservation de l'énergie dans la collision.

$$E_\gamma = E_\gamma' + E_c' \\ E_c' = E_\gamma - E_\gamma' \quad \text{AN} \quad E_c' = 124 - 120.55 = 3.45 \text{ keV}$$

Ce qui signifie que la vitesse de l'électron est $3.68 \times 10^7 \text{ m/s}$.