

Mécanique quantique – SMC (2014 – 2015)

Correction de la série N° 3

Solution de l'exercice N° 1 : Ondes de De Broglie

On calcule la longueur d'onde de De Broglie associée à :

1- Une balle de fusil de masse 1 g et de vitesse 500 m/s.

$$\lambda = \frac{h}{mV} \quad \text{AN} \quad : \quad \lambda = \frac{6.626 \times 10^{-34}}{1 \times 500} = 13.25 \times 10^{-39} \text{ m}$$

2- Un grain de poussière de masse 10^{-15} kg et de vitesse 1 mm/s.

$$\lambda = \frac{h}{mV} \quad \text{AN} \quad : \quad \lambda = \frac{6.626 \times 10^{-34}}{10^{-15} \times 10^{-3}} = 6.626 \times 10^{-16} \text{ m}$$

3- Un électron accéléré sous une différence de potentiel $U = 100\text{V}$.

Pour un électron de quantité de mouvement $\vec{p}$ et donc d'énergie cinétique $E_C = \frac{p^2}{2m}$, la

longueur d'onde associée λ est : $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE_C}}$

Soit en utilisant les valeurs numériques de h et m :

$$\lambda(\text{\AA}) = \sqrt{\frac{150}{E_C(\text{eV})}} \approx \frac{12.26}{\sqrt{V(\text{Volt})}} \quad \text{AN} \quad : \quad \lambda = 1.226 \text{\AA}$$

4- Un électron dans l'atome d'hélium ayant une énergie cinétique de 24.6 eV correspondant à l'énergie d'ionisation de l'hélium.

$$\text{On a : } \lambda(\text{\AA}) = \sqrt{\frac{150}{E_C(\text{eV})}} \quad \text{AN} \quad : \quad \lambda = 0.5 \text{\AA}$$

5- Une particule α (noyau d'hélium) ayant une énergie cinétique de 7.7 MeV.

$$\text{On a : } \lambda(\text{\AA}) = \sqrt{\frac{150}{E_C(\text{eV})}} \quad \text{AN} \quad : \quad \lambda = 1.6 \text{\AA}$$

On ne considère les propriétés ondulatoires de la matière que pour des particules ayant une dimension de l'ordre de la longueur d'onde de Louis De Broglie.

Solution de l'exercice N° 2 : Neutron thermique.

Un neutron thermique est un neutron en équilibre thermique avec la matière à une température donnée (généralement quelques centaines de K).

Nous admettons que l'énergie cinétique moyenne d'une entité (une molécule) de gaz parfait à la température absolue T selon une direction est : $E_{C,\text{moy}} = \frac{1}{2} m V_x^2 = \frac{1}{2} k_B T$

Selon les trois directions on écrit : $E_{C,\text{moy}} = \frac{1}{2} m (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) = \frac{1}{2} m V^2 = \frac{3}{2} k_B T$

$k_B = 1,382.10^{-23}$ S.I. est la constante de Boltzmann, $k_B = R/N_A$ où R est la constante des gaz parfaits et N_A est le nombre d'Avogadro).

La longueur d'onde λ de De Broglie, associée à un neutron thermique à une température $\theta = 25^\circ\text{C} = 298\text{ K}$.

On trouve : $\lambda = \frac{h}{\sqrt{3mk_B T}}$

AN : $m_n = 1.67 \cdot 10^{-27}\text{ kg}$ $\lambda = 0.8 \cdot 10^{-10}\text{ m}$

Solution de l'exercice N° 3 : Vitesse de propagation de l'onde de de Broglie

1) Le vecteur d'onde k_{DB} de l'onde de de Broglie en fonction de m et v .

$$p = \hbar k_{DB} \quad \Leftrightarrow \quad k_{DB} = \frac{p}{\hbar} = \frac{2\pi \cdot m \cdot v}{h}$$

2) L'expression de ω_{DB} en fonction de m , v et h .

$$E = \hbar \omega_{DB} \quad \Leftrightarrow \quad \omega_{DB} = \frac{E}{\hbar} = \frac{2\pi \cdot E_C}{h} \quad \text{Sachant que : } E = E_C$$

Donc $\omega_{DB} = \frac{\pi \cdot m \cdot v^2}{h}$

3) La vitesse de propagation de l'onde de de Broglie, appelée « vitesse de phase ».

$$V_\phi = \frac{\omega_{DB}}{k_{DB}} = \frac{v}{2}$$

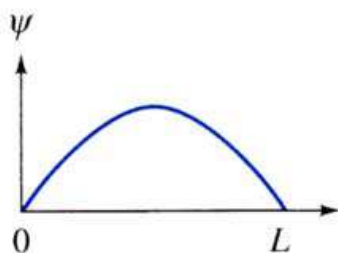
Solution de l'exercice N° 3 : Probabilité de localisation d'un atome

Un atome en interaction avec un puits d'énergie potentielle infiniment profond de largeur $L = 2\text{ nm}$, se trouve dans un état stationnaire d'énergie ϵ . On admet que sa fonction d'onde $\psi(x, t)$ est de la forme : $\psi(x, t) = \psi(x) \cdot \exp(-i\omega t)$.

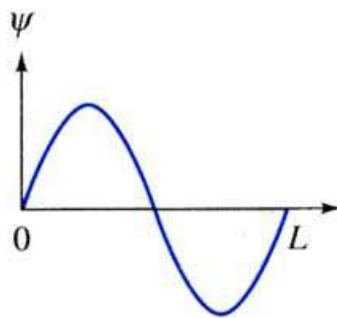
L'amplitude complexe $\psi(x)$ de la fonction d'onde de probabilité, associée à son état est choisie réelle :

$$\psi(x, t) = \begin{cases} A \sin(3\pi \frac{x}{L}) & \text{pour } 0 < x < L \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

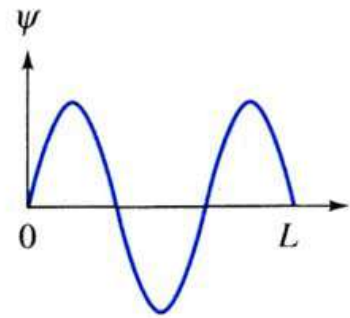
1) Représentation graphique de : $\psi(x)$ et $\psi^2(x)$.



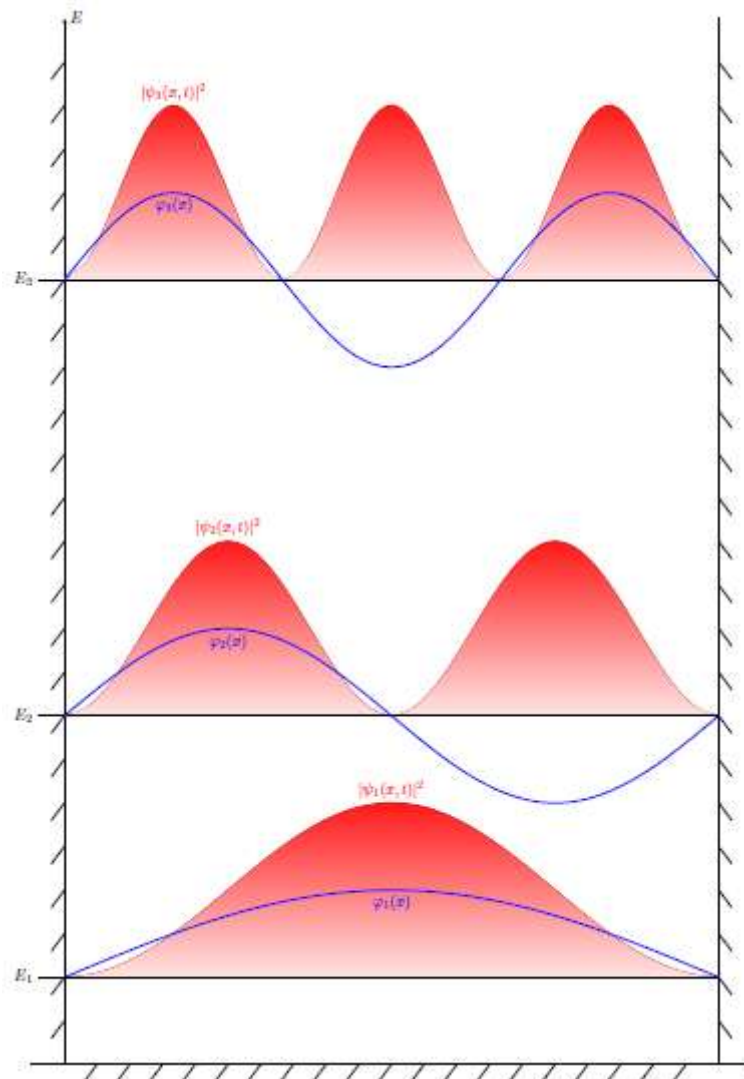
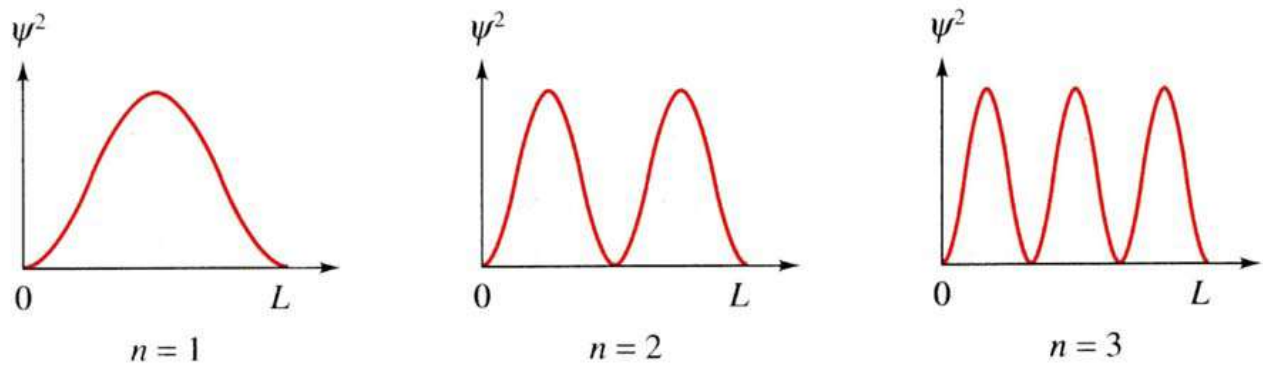
$n = 1$



$n = 2$



$n = 3$



Fonctions d'onde et énergies dans le puits infini

2) On exprime la probabilité de trouver l'objet quantique entre x et $x + dx$, par calcul de $dP = \|\psi(x, t)\|^2 dx = \psi(x, t) \times \psi^*(x, t) dx$.

La probabilité de trouver l'objet quantique entre $x = 0$ et $x = L$ est égale à 1.

La probabilité de trouver l'objet quantique Entre les abscisses $x = 0$ et $x = L/3$ est $1/3$.

3) En déduire la constante A en précisant son unité ainsi que la fonction d'onde $\psi(x, t)$.

$$P = \int_0^L \|\psi(x, t)\|^2 dx = A^2 \int_0^L \sin^2\left(3\pi \frac{x}{L}\right) dx = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

A et $\psi(x, t)$ ont une unité de L^{-1}

Dans le cas où A et $\psi(x, t)$ représentées à trois dimensions, elles ont une unité de L^{-3}

4) La particule classique qui se trouverait dans un puits de potentiel infini :

- Spectre continu d'énergie
- Particule strictement localisée dans $[0, L]$

Solution de l'exercice N° 4 : Principe d'incertitude de Heisenberg

A- L'incertitude sur la quantité de mouvement de l'électron, en **eV/c**.

$$\Delta p = \frac{h}{2\Delta x} = \frac{6.582 \times 10^{-16} \text{ eV.s}}{2 \times 10^{-14} \text{ m}} \times \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{C} = 9.873 \times 10^6 \approx 9.9 \times 10^6 \text{ eV/C}$$

B - Par comparaison de **pc** avec **$m_e c^2$** :

$$pC = 10^7 \text{ eV} \gg m_e c^2 = 511 \text{ keV} \quad \text{Relativiste}$$

C - L'énergie relativiste de l'électron, en **MeV**.

$$E^2 = (pC)^2 + (m_e c^2)^2$$

$$AN : E^2 = (9.873 \times 10^6)^2 + (5.11 \times 10^5)^2$$

$$E^2 = 9.88621515 \times 10^6 \approx 9.89 \times 10^6 \text{ eV}$$

D - L'énergie cinétique relativiste, en **MeV**.

$$E_C = E - m_e c^2 \quad AN : E_C = 9.89 \times 10^6 - 5.11 \times 10^5 \approx 9.4 \times 10^6 \text{ eV}$$

Solution de l'exercice N° 5 : Fonctions d'onde

Partie I : Fonctions d'onde associée à une onde progressive

La fonction d'onde associée à une onde progressive peut s'écrire :

$$\psi(x, t) = \phi(x) e^{-i\omega t} = A e^{\pm i k x} e^{-i\omega t}$$

avec $\phi(x) = A e^{\pm i k x}$ la partie spatiale (ou amplitude complexe).

1- Le sens de propagation des ondes :

$$\psi_1(x, t) = A e^{+i k x} e^{-i\omega t} : \text{ Dans sens du vecteur d'onde } (\vec{k}), \text{ il se comporte comme onde incidente.}$$

$$\psi_1(x, t) = A e^{-i k x} e^{-i\omega t} : \text{ Dans sens opposé du vecteur d'onde } (\vec{k}), \text{ il se comporte comme onde réfléchi}$$

2- Soit la fonction d'onde associée à une particule libre de la forme :

$$\psi_a(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)} \quad \text{ou} \quad \psi_b(x, t) = A e^{-i(kx - \omega t)}$$

Dans quel sens chacune de ces ondes se propagent-elles ? Laquelle est compatible avec

$$\text{l'équation de Schrödinger } -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + U(x, t) \Psi(x, t) = i \hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} ?$$

Partie II Fonction d'onde - Probabilité de présence - valeurs moyennes

La fonction d'onde d'une particule ponctuelle est donnée par :

$$\psi(x, 0) = \phi(x) = A \left(e^{i \frac{\pi x}{a}} + 1 \right) \quad \text{pour } -a < x < a \quad \text{et} \quad \Phi(x) = 0 \text{ ailleurs.}$$

1- Calculer $\|A\|$ pour que la fonction $\Phi(x)$ soit normée. Rappeler la raison physique de la normalisation.

Indication: $e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos u$

2- Dessiner $\|\phi(x)\|^2$ Sans faire de calcul d'écart quadratique moyen, évaluer la dispersion Δx de la position de la particule.

3- Quelle est la probabilité P_1 de trouver la particule entre les deux points d'abscisses respectives 0 et $a/2$ lors d'une mesure de position effectuée à l'instant $t=0$.