

Mécanique quantique – SMC (2014 – 2015)

Série N° 4

Exercice N° 1

On considère le potentiel $V(x)$ suivant :

$$\begin{aligned} V(x) &= 0 \quad \text{pour } x < 0 \\ &= -V_0 \quad \text{pour } 0 \leq x \leq a \\ &= \infty \quad \text{pour } x > a \end{aligned}$$

V_0 et a sont des constantes positives.

On s'intéressera seulement aux états liés pour lesquels l'énergie totale $-V_0 < E < 0$.

1- Représenter la courbe $V(x)$.

2- Résoudre l'équation de Schrödinger dans les différentes zones.

On posera : $k_1 = \sqrt{\frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}}$ et $k_2 = \sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}$

3- Ecrire les équations de continuité.

Solution de l'exercice N° 1

1)

2) $x < 0 : V(x) = 0$
 $-\frac{\hbar^2}{2m} \phi_1''(x) = E \phi_1(x)$
 $\phi_1''(x) + \frac{2mE}{\hbar^2} \phi_1(x) = 0$
 $\phi_1''(x) - k_2^2 \phi_1(x) = 0$
 $\phi_1(x) = A e^{k_2 x} + B e^{-k_2 x}$
 Comme $\phi_1(x)$ doit être bornée,
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi_1(x) = 0 : B = 0$
 il reste : $\phi_1(x) = A e^{k_2 x}$

* $0 < x < a$:
 $\phi_2''(x) + \frac{2m}{\hbar^2} (E + V_0) \phi_2(x) = 0$
 $\phi_2(x) = C e^{i k_1 x} + D e^{-i k_1 x}$

* $x > a$
 $\phi_3(x) = 0$
 la barrière est infinie, la particule ne peut pas exister dans cette région.

3) on a :
 i) $\phi_1(0) = \phi_2(0) \Leftrightarrow A = C + D$
 ii) $\phi_1'(0) = \phi_2'(0) \Leftrightarrow A k_2 = i k_1 (C - D)$
 iii) $\phi_2(a) = \phi_3(a) \Leftrightarrow C e^{i k_1 a} + D e^{-i k_1 a} = 0$

Exercice N° 2

Soit une particule quantique libre dont l'état dynamique est décrite par la fonction d'onde suivante :

$$\psi(x, t) = c(k) \exp\left[i(kx - \frac{\hbar k^2 t}{2m})\right]$$

Donner

1. l'impulsion p de la particule ;
2. l'incertitude sur l'impulsion;
3. la densité de probabilité de présence de la particule ;
4. l'incertitude sur la position de la particule $\langle \Delta x \rangle$;

Solution de l'exercice N° 2

1. L'impulsion de la particule est donnée par $p = \hbar k$.
2. L'incertitude sur la valeur de l'impulsion $\langle \Delta p \rangle = 0$ puisque pour un nombre d'onde, k , donné on connaît exactement la valeur de l'impulsion.
3. La densité de probabilité de présence de la particule est donnée par $c^*(k).c(k)$ et est indépendante de la position.
4. L'incertitude sur la position de la particule est infinie puisque l'incertitude sur l'impulsion est nulle (principe d'incertitude d'Heisenberg).

Exercice N° 3

Soit un puits de potentiel unidimensionnel de profondeur infinie tel que $V(x) = 0$ pour $-a/2 < x < a/2$ et $V(x) = +\infty$ pour $x < -a/2$ et $x > a/2$ avec $a = 5$ nm.

1. Quelle est l'expression de la fonction de densité de probabilité pour le nombre quantique $n = 3$?
2. Pour $n = 1$, quelle est la probabilité de présence de la particule hors du puits de potentiel ?
3. Pour $n = 4$, quelle est la valeur de la probabilité de présence de la particule dans l'intervalle $-a/4 < x < a/4$?

Solution de l'exercice N°3

1. Dans un puits de potentiel unidimensionnel de profondeur infinie centré en $x = 0$, les fonctions d'ondes pour les nombres quantiques, n , impairs sont des fonctions symétriques de la forme :

$$\phi(x) = C \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

Pour $n = 3$, la fonction de densité de probabilité est donc donnée par le produit de la fonction d'onde par son complexe conjugué

$$\phi^* \phi = C^2 \cos^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

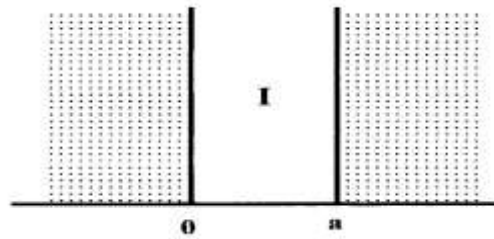
2. Dans le cas d'un puits de potentiel de profondeur infinie, la probabilité de présence d'une particule hors du puits (pénétration de barrière) est nulle quelle que soit la valeur du nombre quantique n .

3. Pour $n = 4$, la fonction de densité de probabilité est donnée par $C^2 \sin^2\left(\frac{4\pi x}{a}\right)$ qui est une fonction symétrique s'annulant en $-a/2, -a/4, 0, a/4$ et $a/2$. On en déduit immédiatement que la probabilité de présence entre $-a/4$ et $a/4$ est égale à la moitié de la probabilité de présence dans le puits (1), soit $1/2$.

Exercice N° 4 : Particule dans un puits de potentiel infini

On considère une particule dans un puits de potentiel infiniment profond

$$\begin{aligned} V(x) &= \infty && \text{pour } x < 0 \\ &= 0 && \text{pour } 0 \leq x \leq a \\ &= \infty && \text{pour } x > a \end{aligned}$$



Puits de potentiel infini

Déterminer les niveaux d'énergie E_n et les fonctions propres $\psi(x)$ caractérisant l'état de la particule dans la région I.

Solution de l'Exercice N° 4 : Particule dans un puits de potentiel infini

La fonction d'onde $\varphi(x)$ est solution de l'équation de Schrödinger

$$\hat{H}\varphi(x) = E\varphi(x)$$

avec $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$

avec les conditions aux limites $\varphi(0) = 0$; $\varphi(a) = 0$ résultant des conditions physiques $|\varphi(x < 0)|^2 = |\varphi(x > a)|^2 = 0$.

Dans le domaine I, l'équation de Schrödinger s'écrit :

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + E \right) \varphi = 0$$

On peut aisément vérifier que la fonction

$$\varphi(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$$

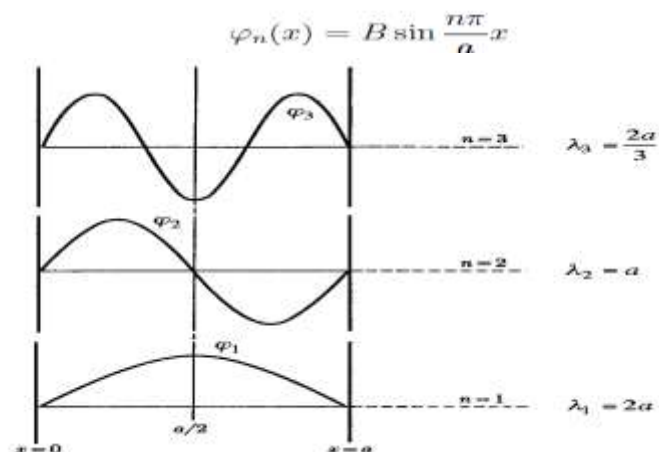
satisfait à cette équation (ici $\alpha^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$)

$$\begin{array}{ll} \text{Or comme } \varphi(0) = 0 & \text{on a } A = 0 \\ \text{et } \varphi(a) = 0 & \text{impose } \alpha_n a = n\pi \end{array}$$

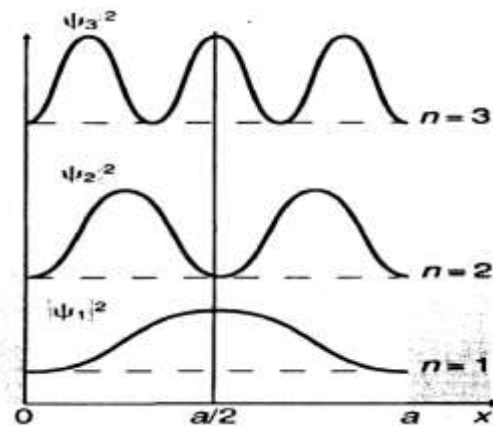
d'où

$$E_n = \frac{\hbar^2 \alpha_n^2}{2m} = n^2 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$$

et



Energies discrètes et fonctions d'onde des trois premiers états de la particule



Les densités de probabilité associées

B est déterminé en imposant que les fonctions $\varphi_n(x)$ doivent être normées :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x^*) \varphi_n(x) dx &\equiv 1 \\ |B|^2 \int_0^a \sin^2 \frac{n\pi x}{a} dx &= \frac{|B|^2}{2} \int_0^a \left(1 - \cos \frac{2n\pi x}{a}\right) dx \\ &= \frac{|B|^2}{2} a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \varphi_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} \text{ pour } 0 \leq x \leq a \\ &= 0 \text{ pour } x < 0 \quad \text{et} \quad x > a \end{aligned}$$

On peut encore écrire

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{2\pi x}{\lambda_n}$$

en associant une longueur d'onde $\lambda_n = \frac{2a}{n}$ à la particule.

Les niveaux E_n se ressèrent ; les états discrets deviennent un continuum et l'on rencontre la situation classique

1. Si n est très grand
2. Si $ma^2 \gg \hbar^2$

Exercice N°5: Puits de potentiel fini

Un électron est situé dans un puits de potentiel de largeur $2a$, de hauteur V_0 . On étudie les états liés, c'est-à-dire ceux dont l'énergie E des électrons est telle que $0 < E < V_0$.

- 1- Déterminer la fonction d'onde $\varphi(x)$ d'un électron.
- 2- En utilisant les conditions aux limites, déterminer les équations qui permettent le calcul des valeurs des énergies.
- 3- Comment peut-on résoudre ces équations?
- 4- Pour quelle valeur maximale de V_0 n'y a-t-il qu'un seul état possible?
- 5- Pour une largeur de puits égale à 5 nm, calculer, en électron-volt, la valeur maximale de V_0 ne permettant qu'un seul état. Déterminer l'écart maximal entre les deux premiers niveaux.

Solution de l'Exercice N° 5 :

Exercice N° 6 : Puits de potentiel

On se place dans 1 dimension et on considère une particule soumise au potentiel $V(x)$ suivant :

$$\begin{aligned} V(x) &= -V_0 & \text{si } -L/2 < x < L/2 \\ V(x) &= 0 & \text{sinon} \end{aligned}$$

avec V_0 positif.

1. Comment appelle-t-on les états d'énergie négative ? Et ceux d'énergie positive ?
2. Résoudre l'équation de Schrödinger pour une particule de masse m et d'énergie $0 > E > -V_0$.

Traiter le cas où la fonction d'onde est paire. On posera $K^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2}$ et $k^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2} - K^2$.

3. On suppose que la fonction d'onde ainsi que sa dérivée sont continues. Quelles sont les conditions pour que cette hypothèse soit vérifiée ? En déduire une deuxième relation entre K et k .

4. Posez $a = \frac{kL}{2}$, $b = \frac{kL}{2}$ et $R = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \left(\frac{L}{2}\right)$ et résoudre graphiquement la condition de continuité.

5. Traiter le cas où la fonction d'onde est impaire.

Solution de l'exercice N° 6 : Puits de potentiel

1- Le spectre de l'énergie est continu et dégénéré d'ordre 2 pour $E > 0$. Il est discret et non dégénéré pour $V_0 < E < 0$.

Dans le cas des solutions $V_0 < E < 0$, les fonctions propres de l'énergie décroissent rapidement lorsqu'on s'éloigne du puits. Cela signifie que la probabilité de trouver la particule loin de l'origine est très faible. On dit que ces états sont des "états liés". Par opposition, les états correspondant à des flux non nuls vers $x = \pm\infty$ sont appelés "états libres".

Exercice N° 7

On considère une particule enfermée dans une boîte unidimensionnelle. Ce système est décrit par le potentiel suivant : $V(x) = 0$ si $0 < x < L$; $V(x) = +\infty$ sinon :

1. Etant donné la nature du potentiel, déterminer l'intervalle sur lequel on doit résoudre l'équation de Schrödinger :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x)}{\partial x^2} + V(x) \Psi(x) = E \Psi(x)$$

et déterminer les conditions limites de la fonction d'onde.

2. En sachant que :

$$\Psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

est la solution générale de cette équation sur l'intervalle intéressant, donner l'expression de k .

3. En utilisant les conditions limites, déterminer B en fonction de A . Puis montrer que l'énergie E de la particule ne peut prendre que certaines valeurs et peut s'écrire $E_n = n^2 E_0$ où n est un entier et E_0 est la plus petite valeur possible de E que l'on déterminera.

4. En utilisant le fait que la particule se trouve forcément entre 0 et L , déterminer complètement l'expression de $\Psi(x)$. On rappelle que la probabilité dP de trouver la particule entre x et $x+dx$ est :

$$dP = |\Psi(x)|^2 dx$$

Et que $2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos(2\alpha)$.

Solution de l'exercice N° 7

1-

A cause des murs de potentiel infiniment hauts en $x = 0$ et $x = L$, la particule ne peut pas se trouver à l'extérieur de l'intervalle $[0, L]$. Sa fonction d'onde doit donc nécessairement s'annuler dès que x atteint les bornes de l'intervalle. Par conséquent, on doit résoudre l'équation de Schrödinger avec $V = 0$ pour $0 < x < L$, avec pour conditions aux bornes $\psi(0) = \psi(L) = 0$.

2-

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -k^2\psi$$

On a alors:

$$\frac{\hbar^2}{2m}k^2\psi = E\psi$$

$$E = \frac{\hbar^2}{2m}k^2 \rightarrow k = \sqrt{2mE}/\hbar$$

3-

$$\psi(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow B = -A$$

$$\psi(L) = 0 \Rightarrow A \exp(ikL) + B \exp(-ikL) = 0$$

soit en utilisant la relation précédente :

$$A(\exp(ikL) - \exp(-ikL)) = 0 \Rightarrow 2i \sin(kL) = 0$$

soit $kL = n\pi$, avec n entier positif.

En remplaçant k par sa valeur :

$$\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}L = n\pi \Rightarrow E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2} = n^2E_0$$

avec $E_0 = \pi^2\hbar^2/(2mL^2)$

4-

$$\psi(x) = A(\exp(ikx) - \exp(-ikx)) = 2iA \sin(kx) = 2iA \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

on doit avoir :

$$\begin{aligned} \int_0^L dP &= \int_0^L |\psi(x)|^2 dx = 1 \\ \Rightarrow 4A^2 \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx &= 1 \\ \Rightarrow 2A^2 \int_0^L \left[1 - \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\right] dx &= 1 \\ \Rightarrow 2A^2 \left[x - \frac{L}{2n\pi} \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\right]_0^L &= 1 \\ \Rightarrow 2A^2 L &= 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2L}} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\psi_n(x) = \frac{2i}{\sqrt{2L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Exercice N° 8 : Électron dans un puit infini

Considérez un électron ($m_e c^2 = 511 \text{ keV}$) confiné dans un puit infini de largeur $a \approx 24.0 \times 10^{-10} \text{ m}$. L'électron se trouve dans le troisième niveau excité, pour lequel $n = 4$.

A. Écrivez la fonction d'onde en termes de x et a .

B. Tracez un schéma de la densité de probabilité $|\psi_4(x)|^2$.

C. Quelles positions, en m , sont les plus probables?

D. Quelle est la probabilité de trouver l'électron entre $x = 0$ et $x = a/8$? (Indice Plutôt que de calculer une intégrale, utilisez le schéma en partie B.)

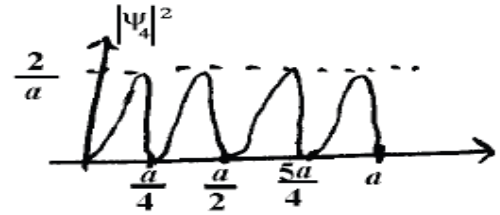
E. Quelles sont les énergies des niveaux $n = 1, 2, 3, 4$, en eV ?

F. Si l'électron passe du niveau $n = 4$ au niveau $n = 1$, quelle est la longueur d'onde du photon émis lors de cette transition?

Solution de l'exercice N° 8 : Électron dans un puit infini

A. $\psi_4(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{4\pi x}{a}$

B. Trois noeud, le max de $|\psi_4(x)|^2$ est $2/a$



C. $\frac{a}{8} = 3 \times 10^{-10} \text{ m}$; $\frac{3a}{8} = 9 \times 10^{-10} \text{ m}$; $\frac{5a}{8} = 15 \times 10^{-10} \text{ m}$; $\frac{7a}{8} = 21 \times 10^{-10} \text{ m}$

D. La surface couvre 1/8 de l'aire totale, qui, elle, vaut 1. Donc 1/8 = **12.5%**

E. $E_n = \frac{n^2 (hc)^2}{8mc^2 a^2} = n^2 \overbrace{(0.06529952164)}^{E_1}$ qui donne $E_1 = 0.0653 \text{ eV}$, $E_2 = 0.261 \text{ eV}$, $E_3 = 0.588 \text{ eV}$, $E_4 = 1.04 \text{ eV}$.

F. $\frac{1}{\lambda} = \frac{E_1(n_i^2 - n_f^2)}{hc}$ mène à $\lambda = 1265.96129 \text{ nm} \approx 1270 \text{ nm}$ ou $1.27 \mu\text{m}$

Exercice N° 9 : Puits infini à trois dimensions

Une particule de masse m est dans une boîte dont les côtés ont des longueurs données par a , b et c . L'énergie de cette particule est donnée par la relation :

$$E = \frac{h^2 \pi^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} + \frac{n_z^2}{c^2} \right)$$

A. Quelle est l'énergie du niveau fondamental, en termes de m , a , b , et c ?

B. Si $a = 2b = 4c$, quel est le degré de dégénérescence (c.-à-d. le nombre d'états différents ayant la même énergie) des cinq plus bas niveaux d'énergie?

Solution de l'exercice N° 9 : Puits infini à trois dimensions

A- Tous les $n = 1$ $E = \frac{h^2 \pi^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} + \frac{n_z^2}{c^2} \right)$

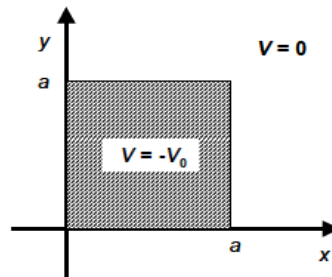
B- $b = a/2$ et $c = a/4$ donne $E = \frac{h^2 \pi^2}{2ma^2} (n_x^2 + 4n_y^2 + 16n_z^2)$ avec $E_0 = \frac{h^2 \pi^2}{2ma^2}$

n_x	n_y	n_z	E / E_0
1	1	1	21
2	1	1	24
3	1	1	29
1	2	1	33
4	2	1	36
2	2	1	36

Niveaux d'énergie $21 E_0$, $29 E_0$, $29 E_0$ et $33 E_0$: et le niveau $36 E_0$ à degré 2.

Exercice N° 10

Considérons un « barreau » ou « fil » nanoscopique de section carrée, $a = 2 \text{ nm}$ dans les directions x et y et d'une longueur de 1 cm suivant l'axe z . Ce « fil » quantique peut être considéré comme un puits de potentiel bi-dimensionnel de profondeur infinie tel que le potentiel $V = -V_0$ (avec $V_0 \rightarrow \infty$) pour $0 \leq x, y \leq a$ et $V = 0$ pour $x, y < 0$ ou $x, y > a$ (voir la figure ci-dessous).



Pour rappel, la masse au repos de l'électron $m_e = 9.109 \cdot 10^{-31}$ kg, sa charge $e = 1.602 \cdot 10^{-19}$ C et la constante de Planck $\hbar = 6.626 \cdot 10^{-34}$ J.s.

- A. Ecrivez l'équation de Schrödinger indépendante du temps pour un électron lié au puits de potentiel d'énergie, E , telle que $-V_0 < E < 0$.
 - B. Résolvez cette équation et proposez une forme générale pour les fonctions d'onde de cet électron.
 - C. Quelles sont les conditions aux limites et de normalisation à appliquer pour déterminer la forme analytique exacte de ces fonctions d'onde et la valeur des constantes d'intégration ?
 - D. En utilisant les conditions aux limites, déterminez l'expression générale des fonctions d'onde à une constante d'intégration près.
 - E. Quelle est l'expression de l'énergie totale, E , de cet électron lié au puits de potentiel ?
- Considérons que l'électron se situe sur le quatrième niveau d'énergie permis, les niveaux étant « classés » en fonction de la valeur croissante de leur énergie par rapport au bas du puits de potentiel.
- F. Quelle est la valeur de l'énergie de cet électron en prenant le bas du puits comme niveau de référence pour l'énergie ?
 - G. Quel est le degré de dégénérescence de ce niveau d'énergie ? Justifiez votre réponse.
 - H. En quelles coordonnées (x, y) , la probabilité de présence d'un électron situé sur ce 4^{ème} niveau est-elle maximale ? Justifiez votre réponse.
 - I. La composante suivant l'axe z de l'impulsion, p_z , est-elle quantifiée ?

Solution de l'exercice N° 10

Pour les points A à H, on considère un espace bi-dimensionnel.

- A. Pour $-V_0 < E < 0$ et $0 < x, y < a$, l'équation de Schrödinger indépendante du temps est la suivante

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \phi(x, y) - V_0 \phi(x, y) = E \phi(x, y) \quad (1)$$

La profondeur du puits tendant vers l'infini, la fonction d'onde s'annule hors du puits.

- B. On pose

$$k^2 = \frac{2m(E + V_0)}{\hbar^2} \quad (2)$$

avec k réel et > 0 . L'équation de Schrödinger se réécrit sous la forme

$$\Delta \phi(x, y) + k^2 \phi(x, y) = 0 \quad (3)$$

k étant indépendant de x et de y , on peut séparer les variables et proposer une solution de la forme $\phi(x, y) = \phi_1(x) \cdot \phi_2(y)$. On effectue la substitution dans (3) et on divise par $\phi(x, y)$ pour obtenir

$$\frac{1}{\phi_1(x)} \cdot \frac{d^2 \phi_1(x)}{dx^2} + \frac{1}{\phi_2(y)} \cdot \frac{d^2 \phi_2(y)}{dy^2} + k^2 = 0 \quad (4)$$

Cette relation devant être satisfaite pour tout x ou y , on obtient le système d'équation suivant

$$\begin{cases} \frac{1}{\phi_1(x)} \cdot \frac{d^2 \phi_1(x)}{dx^2} + k_1^2 = 0 \\ \frac{1}{\phi_2(y)} \cdot \frac{d^2 \phi_2(y)}{dy^2} + k_2^2 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

avec $k_1, k_2 > 0$ et $k^2 = k_1^2 + k_2^2$. La solution générale est de la forme

$$\begin{cases} \phi_1(x) = A_1 \exp(-ik_1x) + B_1 \exp(ik_1x) = C_1 \cos(k_1x) + iD_1 \sin(k_1x) \\ \phi_2(y) = A_2 \exp(-ik_2y) + B_2 \exp(ik_2y) = C_2 \cos(k_2y) + iD_2 \sin(k_2y) \end{cases} \quad (6)$$

C. Comme la profondeur du puits tend vers l'infini, il n'y a pas de pénétration de barrière. La fonction d'onde s'annule donc en dehors du puits. Les conditions aux limites sont donc les suivantes

$$\begin{cases} \phi(0, y) = 0 & , & \phi(a, y) = 0 \\ \phi(x, 0) = 0 & , & \phi(x, a) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

La dernière constante d'intégration sera déterminée par la condition de normalisation de la fonction de densité de probabilité

$$\iint_{\text{espace}} \phi^* \phi d\tau = \int_0^a \int_0^a \phi^*(x, y) \phi(x, y) dx dy = 1 \quad (8)$$

D. L'application des conditions aux limites en $x = 0$ ou $y = 0$ impose de poser $D_1 = D_2 = 0$ dans (6) et permet de démontrer que la fonction d'onde est de la forme

$$\Rightarrow \phi(x, y) = A \sin(k_1x) \sin(k_2y) \quad (9)$$

L'application des conditions aux limites en $x = a$ et $y = a$ permet de démontrer que

$$k_1 = n_1 \frac{\pi}{a} \quad \text{et} \quad k_2 = n_2 \frac{\pi}{a} \quad \text{avec} \quad n_1, n_2 = 1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

La fonction d'onde est donc égale à

$$\phi(x, y) = A \sin\left(\frac{n_1 \pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi y}{a}\right) \quad (11)$$

Avec la constante A déterminée par la condition de normalisation.

E. A partir de l'expression $k^2 = k_1^2 + k_2^2$ et des relations (2) & (10), on déduit que l'expression de l'énergie totale est

$$E = -V_0 + \frac{\hbar^2 (k_1^2 + k_2^2)}{2m} = -V_0 + \frac{\hbar^2 (n_1^2 + n_2^2)}{8ma^2} \quad (12)$$

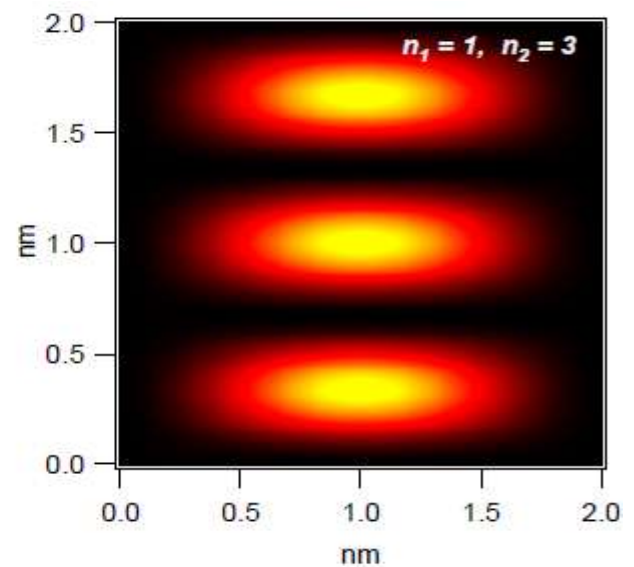
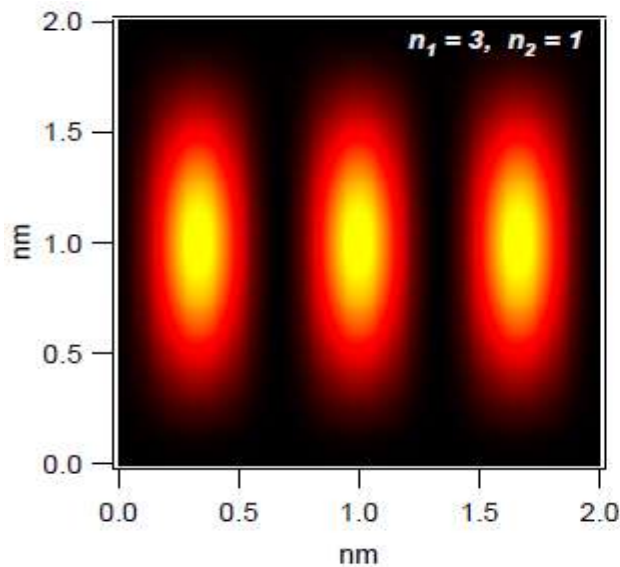
F. Le quatrième niveau d'énergie est caractérisé par les nombres quantiques $n_1 = 3$ et $n_2 = 1$ ou $n_1 = 1$ et $n_2 = 3$. A partir de (12) et en prenant $V_0 = 0$ on trouve que l'énergie du quatrième niveau $E_4 = 1.506 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 0.940 \text{ eV}$.

G. Deux combinaisons de nombres quantiques, et donc deux fonctions d'ondes ou états dynamiques différents, étant possibles pour ce niveau d'énergie, **le degré de dégénérescence est égal à 2**.

H. La fonction de densité de probabilité est donnée à une constante A^*A près par une des deux fonctions suivantes

$$\phi^*(x,y)\phi(x,y) = A^*A \sin^2\left(\frac{3\pi x}{a}\right) \sin^2\left(\frac{\pi y}{a}\right) \text{ ou } A^*A \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin^2\left(\frac{3\pi y}{a}\right) \quad (13)$$

Dans les deux cas, il s'agit du produit d'une fonction présentant un maximum en y ou $x = a/2$ et d'une fonction présentant trois maxima égaux en x ou $y = a/6, a/2$ et $5a/6$. La fonction de densité de probabilité est donc maximale en $(x,y) = (a/6, a/2)$, $(a/2, a/2)$ et $(5a/6, a/2)$ pour $n_1 = 3$ et $n_2 = 1$ ou $(x,y) = (a/2, a/6)$, $(a/2, a/2)$ et $(a/2, 5a/6)$ pour $n_1 = 1$ et $n_2 = 3$ (cfr. les figures ci-dessous).



I. Le barreau métallique étant quasi-infini dans la direction z , les particules peuvent se comporter comme des particules libres dans cette direction. Il n'y a donc pas de discrétisation ni de l'énergie, ni de l'impulsion dans cette direction. **La composante p_z de l'impulsion n'est donc pas quantifiée**.