

Filière : SMC
Semestre : 4
Session Normale

Epreuve de la Mécanique quantique

Lundi : 08 Juin 2015
Durée : 120 minutes

Problème N° 1 : Effet photoélectrique

(7.5 points)

Une radiation lumineuse monochromatique (dont on peut faire varier l'intensité et la fréquence) frappe une plaque métallique. Si le transfert d'énergie est suffisant, certains électrons sont extraits du métal et peuvent atteindre un collecteur. On mesure un courant dit photoélectrique. On appelle W le travail d'extraction des électrons de ce métal (énergie nécessaire pour extraire un électron du réseau métallique, dépendant de la nature du métal).

Aspect expérimental : On se propose d'interpréter les résultats expérimentaux suivants :

1) Des électrons ne sont émis que si la fréquence de la radiation est supérieure à une radiation seuil ν_s .
Quelle est l'expression de ν_s ? 0.5

2) Pour une fréquence supérieure au seuil, si un électron acquiert dans la plaque une énergie E , quelle sera son énergie cinétique une fois extrait de la plaque? (donner l'expression de l'énergie cinétique) 1

3) On peut annuler le courant au niveau du collecteur par freinage électrique en portant la plaque à un potentiel $+V$ par rapport au collecteur. L'énergie consommée ainsi par un électron pour aller de la plaque au collecteur est eV .

Montrer que pour chaque fréquence ν supérieure au seuil ν_s , la tension V peut être augmentée jusqu'à une certaine valeur dite tension d'arrêt V_a , pour laquelle le courant s'annule. 1

Justifier l'allure de la courbe expérimentale de V_a en fonction de ν . Quelle est la pente correspondante? 0.5

4) Si l'on augmente l'intensité lumineuse du faisceau, la fréquence seuil n'est pas modifiée. Pour une fréquence ν supérieure au seuil, une augmentation de l'intensité lumineuse ne change pas la valeur de V_a , mais produit une augmentation du courant photoélectrique.

Corréler ces résultats avec l'interprétation d'Einstein de la théorie des quanta. 1

Application au sodium métallique : Son travail d'extraction est de $W = 2,3 \text{ eV}$.

5) Calculer la fréquence seuil et la longueur d'onde dans le vide correspondante. 1

6) Quelle est sa couleur? 0.5

7) On utilise un rayonnement UV de longueur d'onde **200 nm**. L'effet photoélectrique a-t-il lieu?
Quelle tension d'arrêt faut-il appliquer pour l'annuler? 1

8) Que vaut la masse, l'énergie et la quantité de mouvement d'un photon de longueur d'onde **200 nm**? 1

Données :

395 < 395 455 490 530 590 650 750 750 >

UV	Violet	Bleu	Vert	Jaune	Orange	Rouge	IR
----	--------	------	------	-------	--------	-------	----

Spectre du rayonnement électromagnétique (λ en nm)

Données : $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J.s}$ et $C = 3.10^8 \text{ m/s}$

TPSV

Problème N°2: Puits de potentiel fini**(6.5 points)**

Soit une particule de masse m et d'énergie E . Elle se trouve piégée dans un puits de potentiel carré telle que $0 < E < V_0$, avec V_0 fini.

Le potentiel carré $V(x)$ est nul sur le segment $[0, +a]$ et $V(x) = V_0$ en dehors de ce segment.

1- Représenter graphiquement le potentiel carré $V(x)$

0.5

2- Résoudre l'équation de Schrödinger stationnaire dans les différentes régions.

1.5

3- Donner la signification physique de chaque terme.

1

4- Expliciter les conditions de continuité aux points $x = 0$ et $x = a$.

2

5- Déduire la condition à laquelle doivent satisfaire les quantités k , q et a où k , q sont définies comme suit :

1.5

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad \text{et} \quad q^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}$$

Problème N°3 : Vecteurs propres communs à deux opérateurs qui commutent (6 points)

Deux opérateurs A et B ont pour matrices représentatives sur une base canonique $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle$ de l'espace vectoriel E_3 :

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{bmatrix}$$

où a et b sont des constantes réelles.

1. Calculer le commutateur $[A, B]$. Les opérateurs A et B sont-ils hermitiens?

1

2. Calculer les valeurs et vecteurs propres de A et B dont on donnera une forme normalisée

3

3. Montrer que les vecteurs propres, de chaque opérateur, sont orthonormés.

1

4. Déterminer une base de E_3 formée de vecteurs propres communs à A et B .

1

Correction de l'épreuve de la Mécanique Quantique

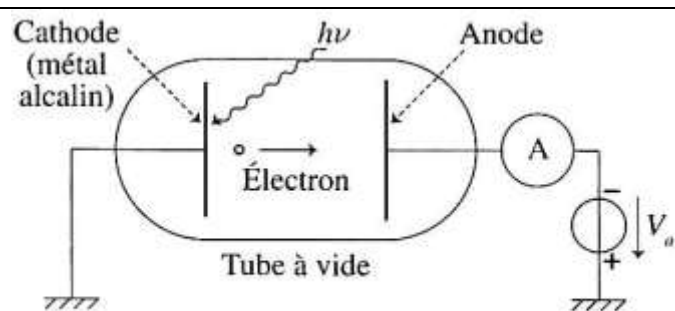
Solution du Problème N° 1 : Effet photoélectrique

L'hypothèse d'Einstein : la lumière est constituée de grains de lumière qui transportent chacun une énergie $E = h\nu$. C'est l'interaction entre un de ces grains de lumière (photon) et un électron qui peut produire l'extraction de ce dernier, à condition que l'énergie apportée par le photon soit supérieure ou égale au travail d'extraction W .

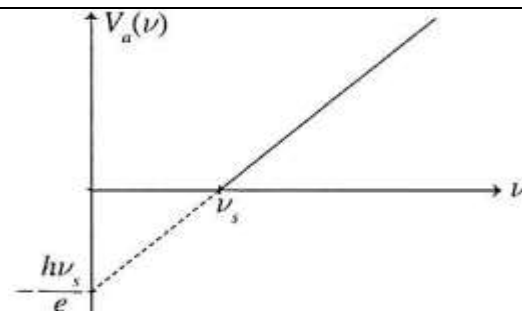
1) Il faut un transfert d'énergie minimale de : $W = h\nu_s$, soit une fréquence seuil $\nu_s = \frac{W}{h}$

2) La conservation de l'énergie s'écrit ici pour l'électron :

$$E = W + \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 = E - W = h(\nu - \nu_s)$$



a) Schéma du montage de l'expérience de Millikan



b) Graphe du potentiel d'arrêt en fonction de la fréquence

3) Lorsqu'on effectue un bilan énergétique entre la cathode (plaque) et l'anode (collecteur), en l'absence de frottements :

$$\Delta E_T = 0 \Leftrightarrow E_{CC} + E_{PC} = E_{CA} + E_{PA} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mV_C^2 - eV_C = \frac{1}{2}mV_A^2 - eV_A$$

Avec :

$$\frac{1}{2}mV_C^2 = \frac{1}{2}mV^2 = E - W = h(\nu - \nu_s) \quad \text{et} \quad V = V_C - V_A$$

Dans le cas où $V = V_a$, le courant est stoppé, c'est-à-dire qu'aucun électron ne dépasse la position du collecteur : $V_A = 0$. On en déduit :

$$E - W - eV_C = 0 - eV_A \Rightarrow h(\nu - \nu_s) = e(V_C - V_A) \Rightarrow V_a = \frac{h}{e}(\nu - \nu_s)$$

La courbe expérimentale représentant V_a en fonction de ν est telle que :

$$V_a = 0 \text{ si } \nu < \nu_s \quad (\text{aucun électron n'est extrait de la plaque})$$

$$V_a = (h/e)(\nu - \nu_s) \text{ si } \nu > \nu_s \quad (\text{droite de pente } h/e)$$

4) Einstein met en évidence la **contradiction** de ces résultats expérimentaux avec le modèle **ondulatoire** de la lumière :

- Les électrons devraient emmagasiner l'énergie de façon continue et, au bout d'un certain temps, avoir l'énergie pour s'extraire, ce qui contredit l'existence d'une fréquence seuil.

- En outre, pour les fortes intensités, les électrons devraient acquérir plus d'énergie et la tension d'arrêt devrait augmenter. Or elle est indépendante de l'intensité.

En revanche, le **modèle corpusculaire** avec le photon transportant le quantum d'énergie

$h\nu$ explique le transfert par collision photon-électron, et l'intensité lumineuse ne mesure que le nombre de photons présents. L'augmenter accroît simplement le nombre de collisions, donc d'électrons émis, mais ne modifie ni la fréquence seuil, ni la tension d'arrêt.

0.5

5) Connaissant le travail d'extraction, on en déduit la fréquence seuil :

$$\nu_s = \frac{W}{h} = \frac{2.3 \times 1.602 \times 10^{-19}}{6.626 \times 10^{-34}} \approx 5.6 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

Ce qui correspond à la longueur d'onde :

$$\lambda_s = \frac{c}{\nu_s} \approx 540 \text{ nm}$$

0.5

0.5

6) Domaine du visible au voisinage de la **couleur jaune**.

7) Un rayonnement **UV** est plus énergétique qu'un rayonnement visible. L'effet photoélectrique a donc forcément lieu puisque $\lambda < \lambda_s$ ou encore $\nu > \nu_s$.

0.5

La tension d'arrêt V_a correspond à $h(\nu - \nu_s) = eV_a$, soit :

0.5

$$V_a = \frac{h}{e}(\nu - \nu_s) = \frac{hc}{e} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_s} \right) = 3.9 \text{ V}$$

8) Les caractéristiques de ce photon sont les suivantes :

0.25

- Masse nulle : $m = 0$;

0.25

- Vitesse la célérité de la lumière dans le vide : $V = c$

0.25

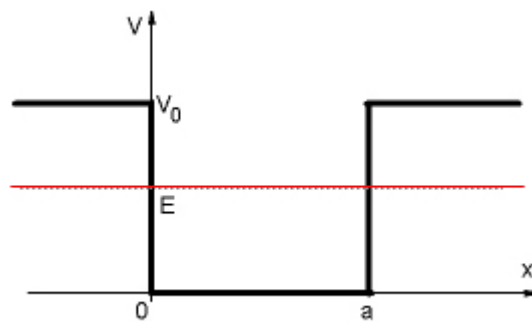
- Energie : $E = h\nu = hc/\lambda = 9.9 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 6.2 \text{ eV}$

0.25

- Quantité de mouvement : $p = E/c = h\nu/c = h/\lambda = 3.3 \times 10^{-27} \text{ kg.m.s}^{-1}$

Solution du problème N°2: Puits de potentiel fini

1- La représentation graphique du potentiel carré $V(x)$.



0.5

2- Résolution de l'équation de Schrödinger stationnaire dans les différentes régions.

L'équation de Schrödinger stationnaire s'écrit :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V \psi = E \psi \quad \Rightarrow \quad \Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) \psi = 0$$

$$* \text{ dans la région I et III: } V(x) = V_0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0) \psi = 0$$

$$\Delta \psi - q^2 \psi = 0 \quad \text{avec} \quad q^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - E)$$

La solution de cette équation dans les régions I et III est $\psi(x) = Ae^{qx} + Be^{-qx}$

1

* dans la région I $\lim_{x \rightarrow -\infty} \psi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (Ae^{qx} + Be^{-qx}) \rightarrow \infty \Rightarrow B = 0$

* dans la région I $\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (Ae^{qx} + Be^{-qx}) \rightarrow \infty \Rightarrow A = 0$

Donc

* dans la région I $\psi_I(x) = Ae^{qx}$

* dans la région III $\psi_{III}(x) = Be^{-qx}$

* dans la région II $V(x) = 0 \Rightarrow \Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi = 0$

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0 \quad \text{avec} \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

La solution de la région II est $\psi_{II}(x) = Ce^{ikx} + De^{-ikx}$

3-

* dans la région I $\psi_I(x) = Ae^{qx}$ onde incidente

* dans la région III $\psi_{III}(x) = Be^{-qx}$ onde transmise

La solution de la région II est $\psi_{II}(x) = Ce^{ikx} + De^{-ikx}$

4- on explicite les conditions de continuité aux points $x = 0$ et $x = a$.

*** au point $x = 0$**

$$\psi_I(0) = A \quad \text{et} \quad \psi_{II}(0) = C + D \Rightarrow \psi_I(0) = A = \psi_{II}(0) = C + D \quad (1)$$

$$\psi_I'(0) = Aq \quad \text{et} \quad \psi_{II}'(0) = iCk - iDk \Rightarrow \psi_I'(0) = Aq = \psi_{II}'(0) = iCk - iDk \quad (2)$$

*** au point $x = a$**

$$\psi_{III}(a) = Be^{-qa} = \psi_{II}(a) = Ce^{ka} + De^{-ka} \quad (3)$$

$$\psi_{III}'(a) = -qBe^{-qa} = \psi_{II}'(a) = ikCe^{ka} - ikDe^{-ka} \quad (4)$$

5- On déduit la condition à laquelle doivent satisfaire les quantités k , q et a .

$$(3) \times ik \Rightarrow ikBe^{-qa} = ikCe^{ka} + ikDe^{-ka} \quad (5)$$

$$(5) + (4) \Rightarrow (ik - q)Be^{-qa} = 2ikCe^{ka} \quad (6)$$

$$(1) \times q \Rightarrow qA = qC + qD \quad (7)$$

$$(7) - (2) \Rightarrow C(q - ik) + D(q + ik) = 0 \quad (8)$$

$$(5) - (4) \Rightarrow (q + ik)Be^{-qa} = 2ikDe^{-ka} \quad (9)$$

$$(8) \Rightarrow \frac{C}{D} = -\frac{q + ik}{q - ik}$$

$$(9)/(6) \Rightarrow -\frac{q + ik}{q - ik} = -\frac{q - ik}{q + ik} e^{-2ka} \Rightarrow e^{2ka} = \left(\frac{q - ik}{q + ik}\right)^2 \Rightarrow e^{ka} = \pm \frac{q - ik}{q + ik}$$

Solution du problème N°3 Vecteurs propres communs à deux opérateurs qui commutent

1- on obtient : $[A, B] = 0$; les opérateurs A et B commutent. Les éléments matriciels a_{ij} de la matrice A vérifient la relation : $a_{ij} = a_{ji}^*$; la matrice A est donc hermitienne et il en est de même pour B. Les opérateurs A et B sont donc hermitiens.

1

2- l'équation caractéristique de A d'écrit : $(a - \lambda)(a + \lambda)^2 = 0$ (1)

La valeur propre **a** est simple et $-a$ est double. Les vecteurs propres de A ont pour composantes :

* pour la valeur propre **a** :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a\alpha = a\alpha \\ -a\beta = a\beta \\ -a\gamma = a\gamma \end{cases} \quad |\phi_a\rangle = (\alpha, 0, 0) \quad (2)$$

0.5

Les conditions de normalisations $\Rightarrow |\phi_a\rangle = (1, 0, 0)$ avec $\alpha = 1$

* pour la valeur propre $-a$:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = -a \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a\alpha = -a\alpha \\ -a\beta = -a\beta \\ -a\gamma = -a\gamma \end{cases} \quad \begin{cases} |\phi_{-a}\rangle = (0, \beta, \gamma) \\ |\phi'_{-a}\rangle = (0, \beta', \gamma') \end{cases} \quad (3)$$

Les conditions de normalisations $\Rightarrow \begin{cases} |\phi_{-a}\rangle = \sqrt{1/2}(0, 1, -1) \\ |\phi'_{-a}\rangle = \sqrt{1/2}(0, 1, 1) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \beta = \pm \gamma \\ \beta' = \pm \gamma' \end{cases}$

0.5

0.5

Les valeurs propres de B sont égales à b et $-b$. La valeur b est double et $-b$ est simple. Les vecteurs propres de B ont pour composantes :

* pour la valeur propre b : $|\phi_b\rangle = (\lambda, \mu, \mu)$; $|\phi'_b\rangle = (\lambda', \mu', \mu')$ (4)

Les conditions de normalisations $\Rightarrow |\phi_b\rangle = (1, 0, 0)$; $|\phi'_b\rangle = \sqrt{1/2}(0, 1, 1)$

1

* pour la valeur propre $-b$: $|\phi_{-b}\rangle = (0, v, -v)$ (5)

Les conditions de normalisations $\Rightarrow |\phi_{-b}\rangle = \sqrt{1/2}(0, 1, -1)$

0.5

3- On montre que les vecteurs propres, de chaque opérateur, sont orthonormés :

On vérifie aisément $\langle \phi_a | \phi_{-a} \rangle = \langle \phi_a | \phi'_{-a} \rangle = 0$ et $\langle \phi_b | \phi_{-b} \rangle = \langle \phi_b | \phi'_{-b} \rangle = 0$

1

4- On constate que :

$$\begin{aligned} |\phi_a\rangle &= |\phi_b\rangle = (1, 0, 0) = |\phi_1\rangle \\ |\phi_{-a}\rangle &= |\phi_{-b}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1) = |\phi_2\rangle \\ |\phi'_{-a}\rangle &= |\phi'_b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1) = |\phi_3\rangle \end{aligned} \quad (7)$$

1

Par hypothèse la base initiale $|\psi_1\rangle$; $|\psi_2\rangle$; $|\psi_3\rangle$ est une base canonique, c'est-à-dire de la forme : $|\psi_1\rangle = (1, 0, 0)$; $|\psi_2\rangle = (0, 1, 0)$; $|\psi_3\rangle = (0, 0, 1)$ (8)

La nouvelle base orthonormée constituée de vecteurs propres communs aux matrices A et B est alors : $|\psi_1\rangle = |\phi_1\rangle$; $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_2\rangle + |\phi_3\rangle)$; $|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_2\rangle - |\phi_3\rangle)$