

Filière : SMC

Semestre : 4

Session de rattrapage

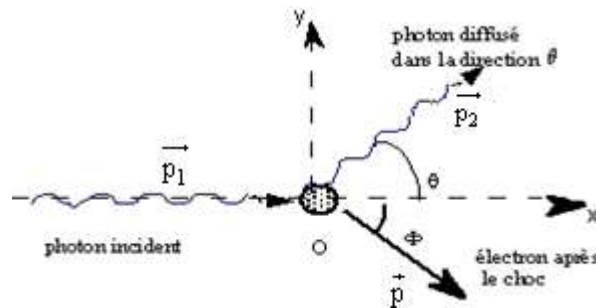
Epreuve de la Mécanique quantique

Lundi : 20 Juin 2015

Durée : 120 minutes

Problème N° 1 : Effet Compton (7 points)

Compton observa que les rayons **X** diffusés possédaient une fréquence ν_2 inférieure à celle des rayons **X** incidents de fréquence ν_1 , et que l'angle de déviation θ des rayons **X** diffusés était fonction de la différence des fréquences. Dans cet exercice, On cherche à établir cette relation.



1) La fréquence de l'onde incidente est $\nu_1 = 2,00 \times 10^{20}$ Hz et la fréquence de l'onde diffusée est $\nu_2 = 1,79 \times 10^{20}$ Hz. Quelles sont les longueurs d'onde dans le vide correspondantes et la nature de ce rayonnement ? 0.5

2) Quelle est l'énergie E_e de l'électron diffusé (supposé primitivement au repos) en eV ? 0.5

3) Quelle serait la vitesse de l'électron diffusé en mécanique classique si sa masse m est $9,1 \times 10^{-31}$ kg ? Justifier la nécessité de considérer un modèle relativiste. 1

4) Donner l'expression de l'énergie d'un photon en fonction de sa quantité de mouvement. 1

5) Plus généralement, l'énergie relativiste (énergie de masse plus énergie cinétique) d'une particule de masse m et de quantité de mouvement $\vec{p}$ (de norme p) s'écrit sous la forme :

$$E = \sqrt{p^2 C^2 + m^2 C^4}$$

Retrouver l'expression de l'énergie du photon de la question précédente. 1

6) En écrivant la conservation de la quantité de mouvement du système photon-électron au cours du choc, avec l'indice 1 pour photon incident ($\vec{p}_1$), 2 pour photon diffusé ($\vec{p}_2$) et pas d'indice pour l'électron ($\vec{p}$), montrer que l'on obtient la relation :

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos \theta$$

7) En écrivant la conservation de la masse-énergie, montrer que l'on obtient la relation :

$$p^2 = (p_1 - p_2)^2 - 2mC(p_1 - p_2)$$

8) En utilisant les deux résultats précédents, montrer que la déviation θ vérifie :

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{mC} (1 - \cos \theta)$$

Calculer l'angle θ . 0.5

Problème N°2: Puits de potentiel infini**(8.0 points)**

Soit une particule de masse m et d'énergie E . Elle se trouve piégée dans un puits de potentiel carré qui est infiniment grande devant l'énergie E de la particule.

Le potentiel est défini comme suit :

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{pour } x < 0 \\ 0 & \text{pour } 0 \leq x \leq a \\ \infty & \text{pour } x > a \end{cases}$$

1- Représenter graphiquement le potentiel carré $V(x)$

2- Résoudre l'équation de Schrödinger stationnaire dans les différentes régions.

3- En écrivant les conditions de continuité aux points $x = 0$ et $x = a$, déduire les valeurs possibles de l'énergie E_n de la particule dans le puits et la fonction d'onde $\psi_n(x)$ associée ($\psi_n(x)$ doit normée).

4- Représenter les 3 premières fonctions d'onde ainsi que les densités de probabilités de présence.

5- Généraliser à 3 dimensions pour trouver les énergies de la particule. Expliquer la dégénérescence des niveaux d'énergie (le degré de dégénérescence des trois plus bas niveaux d'énergie).

0.5

1

2.5

2

2

Problème N°3 : Probabilité de présence et valeurs moyennes**(5 points)**

Dans un problème à une dimension, une particule est décrite à l'instant $t = 0$ par la fonction d'onde :

$$\psi(x, 0) = \psi(x) = N \exp\left(-\frac{|x|}{a}\right) \exp\left(\frac{ip_0 x}{\hbar}\right)$$

Où a et p_0 sont des constantes réelles.

1) Donner les dimensions des constantes a et p_0 .

2) Calculer la constante de normalisation N . Déduire sa dimension.

3) Tracer la fonction densité de probabilité de présence.

4) On mesure la position de la particule ; quelle est la probabilité de la trouver entre $-a/2$ et $+a/2$?

5) Calculer les valeurs moyennes de x et de x^2 . En déduire $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$. Interprétation physique.

$$\text{On donne : } \int_0^{+\infty} r^2 e^{-\frac{2r}{a}} dr = \frac{a^3}{4} \quad \& \quad \langle X \rangle = \langle \psi | x | \psi \rangle = \int \psi^*(x) x \psi(x) dx$$

1

1

1

1

1

Correction de l'épreuve de la Mécanique Quantique

Solution du Problème N° 1 : Effet Compton

1) On déduit la longueur d'onde d'après la relation $\lambda = C/\nu$:

$$\lambda_1 = 1,50 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 1,50 \text{ pm} \text{ et } \lambda_2 = 1,68 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 1,68 \text{ pm}$$

On est bien dans le domaine des rayons X durs.

2) En supposant **la conservation de l'énergie** au cours du choc, on obtient :

$$E_e = E_1 - E_2 = 1,39 \cdot 10^{-14} \text{ J} = 87,6 \text{ keV}$$

3) En supposant un modèle classique, l'énergie cinétique de l'électron s'exprime par :

$$E_e = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2E_e}{m}} = 1,8 \times 10^8 \text{ m/s} \approx 0,58 C$$

Nous trouvons une valeur non négligeable devant $C = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$. Il faut donc passer en mécanique relativiste.

4) On retrouve l'expression de l'énergie $E = h\nu = hc/\lambda$ en fonction de la quantité de mouvement grâce à la relation de Louis de Broglie $\lambda = h/p$: $E = pC$.

5) Le photon ayant **une masse nulle**, on retrouve bien pour son énergie $E = pC$.

6) **La conservation de la quantité de mouvement** avant (électron immobile) et après le choc s'écrit :

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \vec{p} \Rightarrow \vec{p} = \vec{p}_1 - \vec{p}_2$$

et en élevant au carré, sachant que le produit scalaire $\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2$ correspond à $p_1 p_2 \cos \theta$, on obtient :

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos \theta$$

7) La conservation de **la masse-énergie** s'écrit, sachant qu'avant le choc l'électron était quasi immobile :

$$p_1 C + mC^2 = p_2 C + \sqrt{p^2 C^2 + m^2 C^4}$$

En élevant au carré, on obtient :

$$\begin{aligned} p^2 C^2 &= [(p_1 - p_2)C + mC^2]^2 \\ &= [(p_1 - p_2)C]^2 + 2mC^2(p_1 - p_2)C + m^2 C^4 \end{aligned}$$

On trouve après simplification :

$$p^2 = (p_1 - p_2)^2 + 2mC(p_1 - p_2)$$

8) En égalant les deux expressions de la quantité de mouvement de l'électron :

$$\begin{aligned} p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos \theta &= (p_1 - p_2)^2 + 2mC(p_1 - p_2) \\ &= p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 p_2 + 2mC(p_1 - p_2) \end{aligned}$$

On déduit la relation : $2p_1 p_2 (1 - \cos \theta) = 2mC(p_1 - p_2)$ avec : $p_1 = h/\lambda_1$ et $p_2 = h/\lambda_2$

Soit :

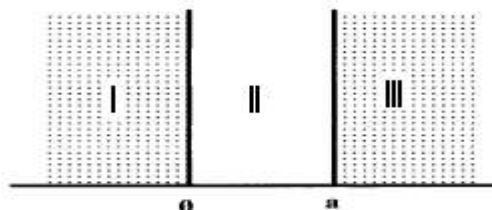
$$\frac{h}{\lambda_1} \cdot \frac{h}{\lambda_2} (1 - \cos \theta) = mC \left(\frac{h}{\lambda_1} - \frac{h}{\lambda_2} \right) \Rightarrow \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{mC} (1 - \cos \theta)$$

Pour la diffusion Compton étudiée, on calcule l'angle de déviation :

$$\cos \theta = 1 - \frac{mC^2}{h} \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2} \Rightarrow \theta = 22,6^\circ$$

Solution du problème N°2: Puits de potentiel infini

1- La représentation graphique du potentiel carré $V(x)$



Puits de potentiel infini

2- Résolution de l'équation de Schrödinger stationnaire dans les différentes régions.

L'équation de Schrödinger stationnaire s'écrit :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V\psi = E\psi \quad \Rightarrow \quad \Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\psi = 0$$

* dans la région I et III: $V(x) = \infty \quad \Rightarrow \quad \psi(x) = 0$

* dans la région II : $V(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi(x) = A \cos kx + B \sin kx$

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

3- Les conditions de continuité aux points $x = 0$ et $x = a$:

* les valeurs possibles de l'énergie E de la particule dans le puits.

$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0$$

$$\psi_{II}(a) = \psi_{III}(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad ka = n\pi$$

D'où l'énergie E de la particule dans le puits

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ma^2}$$

Et les fonctions d'onde associée

$$\psi_n(x) = B \sin \frac{n\pi}{a} x$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^*(x) \psi_n(x) dx = 1 \quad \Rightarrow \quad |B|^2 \int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi}{a} x\right) dx = 1$$

$$\Rightarrow \frac{|B|^2}{2} \int_0^a \left(1 - \cos \frac{2n\pi x}{a}\right) dx = \frac{|B|^2}{2} a = 1$$

$$\Rightarrow B = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

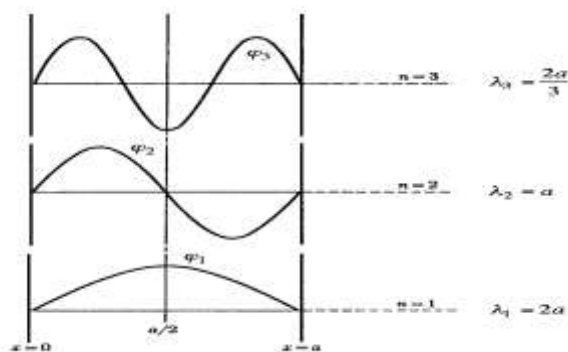
$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi}{a} x \quad \text{pour } 0 \leq x \leq a$$

$$= 0 \quad \text{pour } x < 0 \text{ et } x > a$$

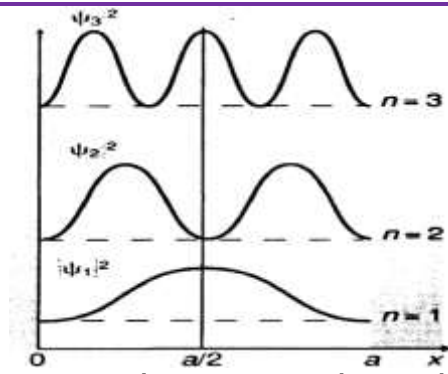
On peut encore écrire $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{2\pi}{\lambda_n} x$

En associant une longueur d'onde $\lambda_n = \frac{2a}{n}$ à la particule.

4- Représentation des 3 premières fonctions d'onde ainsi que les densités de probabilités de présence.



Energies discrètes et fonctions d'onde des trois premiers états de la particule



Les densités de probabilité associées

5- Généralisation à 3 dimensions pour trouver les énergies de la particule.

Les énergies propres et fonctions propres suivantes de la particule.

$$E_{n_x, n_y, n_z} = (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$$

$$\psi_{n_x, n_y, n_z}(x, y, z) = A \sin(n_x \frac{\pi}{a} x) \sin(n_y \frac{\pi}{a} y) \sin(n_z \frac{\pi}{a} z)$$

La constante **A** s'obtient en normalisant la fonction d'onde :

$$\int \psi_{n_x, n_y, n_z}^*(x, y, z) \psi_{n_x, n_y, n_z}(x, y, z) dV = |A|^2 \int_0^a \sin^2(n_x \frac{\pi}{a} x) dx \int_0^a \sin^2(n_y \frac{\pi}{a} y) dy \int_0^a \sin^2(n_z \frac{\pi}{a} z) dz$$

on aura après un calcul d'intégration simple :

$$|A| = \sqrt{\frac{8}{a^3}}$$

En posant $n^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$, on peut écrire enfin :

$$E_n = N^2 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} \quad \psi_{n_x, n_y, n_z}(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{a^3}} \sin(n_x \frac{\pi}{a} x) \sin(n_y \frac{\pi}{a} y) \sin(n_z \frac{\pi}{a} z)$$

Dans ce cas, une même énergie peut correspondre à plusieurs fonctions propres car plusieurs jeux des nombres entiers n_x, n_y, n_z peuvent donner une même valeur de N^2 . On dit alors que l'énergie est dégénérée; son degré de dégénérescence **g** est le nombre de fonctions propres linéairement indépendantes correspondant à cette même valeur de l'énergie. Il est facile de déterminer le degré de dégénérescence **g** comme le montre le tableau suivant :

On a : $E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$

Energie	Combinaisons (n_x, n_y, n_z)	Degré de dégénérescence
$3 E_1$	(1, 1, 1)	1
$6 E_1$	(2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2)	3
$9 E_1$	(2, 2, 1), (2, 1, 2), (1, 2, 2)	3

Solution du problème N°3 : Probabilité de présence et valeurs moyennes

$$\psi(x, 0) = \psi(x) = N \exp(-\frac{|x|}{a}) \exp(\frac{ip_0 x}{\hbar})$$

1) Les dimensions des constantes a et p_0 .

$$[a] = L \quad [p_0] = MLT^{-1} \text{ car } [p_0] = \frac{[\hbar]}{[x]} = \frac{ML^2T^{-1}}{L} = MLT^{-1} \quad : \text{quantité de mouvement}$$

2) La dimension de la constante de normalisation N.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$$

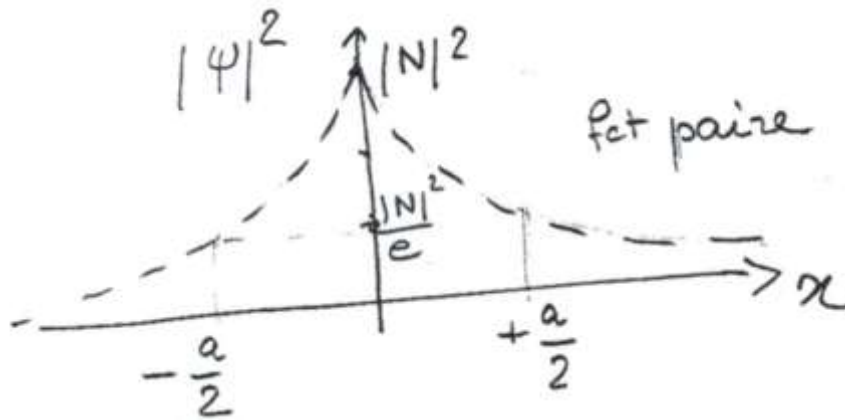
$$|N|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2|x|}{a}} dx = 2|N|^2 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{2x}{a}} dx = 2|N|^2 \left(-\frac{a}{2}\right) [e^{-\frac{2x}{a}}]_0^{+\infty} = |N|^2 a = 1$$

$$\rightarrow |N| = \frac{1}{\sqrt{a}} \Rightarrow N = \frac{1}{\sqrt{a}} \quad \text{à une phase près}$$

$$\rightarrow [N] = L^{-1/2}$$

* Calcul de N

3) Traçage de la fonction densité de probabilité de présence.



4) Mesure la position de la particule : La probabilité de la trouver entre $-a/2$ et $+a/2$.

$$P\left(-\frac{a}{2} \rightarrow \frac{a}{2}\right) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} |\psi(x)|^2 dx = 2|N|^2 \int_0^{\frac{a}{2}} e^{-\frac{2x}{a}} dx = 2\frac{1}{a} \left(-\frac{a}{2}\right) [e^{-\frac{2x}{a}}]_0^{\frac{a}{2}} = 1 - \frac{1}{e} = 0.63$$

5) Calcul des valeurs moyennes de x et de x^2 .

$$\langle x \rangle = 0$$

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx = 2|N|^2 \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{2x}{a}} dx = 2\frac{1}{a} \frac{a^3}{4} = \frac{a^2}{2}$$

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$