

Mécanique quantique – SMC Série complémentaire (2014 – 2015)

Exercice 1. Les opérateurs A_i ($i=1-6$) sont définis comme suite :

$$A_1\psi(x) = [\psi(x)]^2$$

$$A_4\psi(x) = x^2\psi(x)$$

$$A_2\psi(x) = \frac{d\psi(x)}{dx}$$

$$A_5\psi(x) = \sin(\psi(x))$$

$$A_3\psi(x) = \int_0^x \psi(x')dx'$$

$$A_6\psi(x) = \frac{d^2\psi(x)}{dx^2}$$

1) Lesquels sont linéaires

2) Lesquels sont hermitiques

Exercice 2. Soient A , B , C et D des opérateurs linéaires ; les égalités suivantes sont-elles toujours vraies :

1) $A + B = B + A$

2) $AB = BA$

3) $(A + B)C = (B + A)C$

4) $C(A + B) = CA + BC$

5) $(A + B)(C + D) = AC + BC + AD + BD$

6) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$

Exercice 3. Equations aux valeurs propres. Supposons que : $A|\phi\rangle = a|\phi\rangle$

Montrez que $|\phi\rangle$ est également vecteur propre des opérateurs

$$A + bI \quad \text{et} \quad cA + dI$$

où b , c et d sont des nombre complexes et I est la matrice unité.

Quelles sont les valeurs propres correspondantes

Exercice 4. Considérons l'espace vectoriel à 2D sous tendu par des vecteurs de base $\{|e_i\rangle\}_{i=1,2}$. Soit l'opérateur A défini par:

$$A|e_1\rangle = |e_2\rangle \quad \text{et} \quad A|e_2\rangle = |e_1\rangle$$

Trouver la représentation matriciel de A dans le système de base $\{|e_i\rangle\}_{i=1,2}$

Exercice 5. Les états $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle\}$ constituent une base orthonormée. L'opérateur H est représenté par la matrice :

$$H|\phi_1\rangle = 1|\phi_1\rangle \quad ; \quad H|\phi_2\rangle = 2|\phi_2\rangle + 1|\phi_3\rangle \quad ; \quad H|\phi_3\rangle = |\phi_2\rangle + 2|\phi_3\rangle$$

Quelle est la matrice qui représente cette opérateur dans la base $\{|\phi_i\rangle\}_{i=1,2,3}$.

1- Calculer les états propres $\{|\psi_i\rangle\}$ et valeurs propres E_i de H dans la base $\{|\phi_i\rangle\}$

3- Déterminer les projecteurs associés aux valeurs propres et donner la relation de fermeture

2- Montrer que $\{|\psi_i\rangle\}$ constitue aussi une base orthonormée

Exercice 6. Soit $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ une base canonique d'un espace à trois dimensions. Dans cette base canonique, la représentation matricielle de ces vecteurs est donc :

$$|u_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |u_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |u_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On définit : $|V\rangle = \frac{|u_1\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{|u_2\rangle}{\sqrt{2}}$ et $|W\rangle = \frac{|u_1\rangle}{2} - \frac{|u_2\rangle}{2} + i\frac{|u_3\rangle}{\sqrt{2}}$

- 1) Donner la représentation matricielle de $|V\rangle$, $\langle V|$ et $|W\rangle$.
- 2) Donner la représentation matricielle de $|\phi\rangle = \frac{|V\rangle}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}|W\rangle$
- 3) Donner la représentation matricielle de $|V\rangle\langle V|$.

Exercice 7: Dénons par E l'espace vectoriel des états d'un système physique. Cet espace est défini à trois dimensions par la donnée de la base orthonormée complète $\{|u_i\rangle\}_{i=1,2,3}$. Soient

$$|\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{i}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle \quad \text{et} \quad |\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle - \frac{i}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle$$

- a) Déterminer les normes de $|\Psi_0\rangle$ et $|\Psi_1\rangle$
- b) Calculer explicitement les opérateurs de projection P_0 et P_1 sur les états $|\Psi_0\rangle$ et $|\Psi_1\rangle$ respectivement. On demande de représenter ces quantités par des matrices 3x3.
- c) Vérifier que P_0 et P_1 sont des projecteurs sur $|\Psi_0\rangle$ et $|\Psi_1\rangle$ respectivement.

Exercice 8: Soit $\{|U_1\rangle, |U_2\rangle\}$ une base de l'espace des états E. Les matrices de Pauli sont définies par :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- 1) Quelles sont les valeurs propres et vecteurs propres associés à ces opérateurs.
- 2) Calculer $\sigma_i\sigma_j$; $[\sigma_i, \sigma_j]$; $\{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i$ et $tr(\sigma_i, \sigma_j)$ pour tout i,j

Exercice 9: On considère un système physique dont l'espace des états qui est à trois dimensions est rapporté à la base orthonormée formée par les trois kets $\{|U_1\rangle, |U_2\rangle, |U_3\rangle\}$. Dans la base de ces trois vecteurs, pris dans cet ordre, l'opérateur J_x est défini par:

$$J_{x_0} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & +1 & 0 \\ +1 & 0 & +1 \\ 0 & +1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1- J_x est-il hermitique?
- 2- Calculer ses valeurs propres et ses vecteurs propres dont on donnera une forme normalisée.
- 3- Vérifier qu'ils sont orthogonaux.
- 4- Calculer les matrices représentant les projecteurs sur les vecteurs propres, vérifier que ceux-ci satisfont à la relation de fermeture.
- 5- Reprendre les mêmes questions pour l'opérateur J_y définie par:

$$J_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 10: Soit $\{|U_1\rangle, |U_2\rangle\}$ une base de l'espace des états E et soit M une matrice 2x2 :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & i\sqrt{2} \\ -i\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$$

- a) Montrer que M est hermitique.
- b) Quelles sont les valeurs propres et vecteurs propres associés à M.
- c) Déterminer les projecteurs associés aux valeurs propres et donner la relation de fermeture.

Exercice N°1

1) Un opérateur linéaire est, par définition, un être mathématique qui, à toute fonction ψ d'un certain espace fonctionnel, fait correspondre une et une seule fonction ψ' bien déterminée de ce même espace, la correspondance étant linéaire :

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= A \psi(x) \\ A [\lambda_1 \psi_1(x) + \lambda_2 \psi_2(x)] &= \lambda_1 A \psi_1(x) + \lambda_2 A \psi_2(x)\end{aligned}$$

Les opérateurs A_2 , A_3 , A_4 et A_6 sont linéaires.

2) Un opérateur est hermitique s'il satisfait à la relation :

$$\langle \psi | A | \varphi \rangle = \langle \varphi | A | \psi \rangle^* \quad \text{ou} \quad \langle A \varphi | \psi \rangle = \langle \varphi | A \psi \rangle$$

Les opérateurs A_4 et A_6 sont hermitiques.

Exercice 2.

- | | |
|--|---------------------|
| 1) $A + B = B + A$ | toujours vraies |
| 2) $AB = BA$ | pas toujours vraies |
| 3) $(A + B)C = (B + A)C$ | toujours vraies |
| 4) $C(A + B) = CA + BC$ | pas toujours vraies |
| 5) Oui : appliquer la distributivité du premier facteur, puis la distributivité du second facteur (attention à l'ordre des facteurs !) | |

$$(A + B)(C + D) = (A + B)C + (A + B)D = AC + BC + AD + BD$$

Exercice 3. Equations aux valeurs propres. Supposons que : $A|\phi\rangle = a|\phi\rangle$

1-

$$\blacklozenge (A + bI)|\phi\rangle = A|\phi\rangle + bI|\phi\rangle = a|\phi\rangle + b|\phi\rangle = (a + b)|\phi\rangle$$

Donc $|\phi\rangle$ est vecteur propre des opérateurs $A + bI$

$$\blacklozenge (cA + dI)|\phi\rangle = cA|\phi\rangle + dI|\phi\rangle = ca|\phi\rangle + d|\phi\rangle = (ca + d)|\phi\rangle$$

Donc $|\phi\rangle$ est vecteur propre des opérateurs $cA + dI$

2-

$$\blacklozenge \text{ Au vecteur propre } A + bI \text{ correspond la valeur propre } (a + b)$$

$$\blacklozenge \text{ Au vecteur propre } cA + dI \text{ correspond la valeur propre } (ca + d)$$

Exercice 5. Les états $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle\}$ constituent une base orthonormée. L'opérateur H est représenté par la matrice :

$$H = \begin{pmatrix} \langle \phi_1 | H | \phi_1 \rangle & \langle \phi_1 | H | \phi_2 \rangle & \langle \phi_1 | H | \phi_3 \rangle \\ \langle \phi_2 | H | \phi_1 \rangle & \langle \phi_2 | H | \phi_2 \rangle & \langle \phi_2 | H | \phi_3 \rangle \\ \langle \phi_3 | H | \phi_1 \rangle & \langle \phi_3 | H | \phi_2 \rangle & \langle \phi_3 | H | \phi_3 \rangle \end{pmatrix}$$

$$H|\phi_1\rangle = 1|\phi_1\rangle \quad ; \quad H|\phi_2\rangle = 2|\phi_2\rangle + 1|\phi_3\rangle \quad ; \quad H|\phi_3\rangle = |\phi_2\rangle + 2|\phi_3\rangle$$

Calculons les éléments de la matrice

$$\langle \phi_1 | H | \phi_1 \rangle = \langle \phi_1 | (H | \phi_1 \rangle) = \langle \phi_1 | \phi_1 \rangle = 1$$

$$\langle \phi_2 | H | \phi_1 \rangle = \langle \phi_2 | (H | \phi_1 \rangle) = \langle \phi_2 | \phi_1 \rangle = 0$$

$$\langle \phi_3 | H | \phi_1 \rangle = \langle \phi_3 | (H | \phi_1 \rangle) = \langle \phi_3 | \phi_1 \rangle = 0$$

$$\langle \phi_1 | H | \phi_2 \rangle = \langle \phi_1 | (H | \phi_2 \rangle) = \langle \phi_1 | (2|\phi_2\rangle + |\phi_3\rangle) = 2\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle + \langle \phi_1 | \phi_3 \rangle = 0$$

$$\langle \phi_2 | H | \phi_2 \rangle = \langle \phi_2 | (H | \phi_2 \rangle) = \langle \phi_2 | (2|\phi_2\rangle + |\phi_3\rangle) = 2\langle \phi_2 | \phi_2 \rangle + \langle \phi_2 | \phi_3 \rangle = 2$$

$$\langle \phi_3 | H | \phi_2 \rangle = \langle \phi_3 | (H | \phi_2 \rangle) = \langle \phi_3 | (2|\phi_2\rangle + |\phi_3\rangle) = 2\langle \phi_3 | \phi_2 \rangle + \langle \phi_3 | \phi_3 \rangle = 1$$

$$\langle \phi_1 | H | \phi_3 \rangle = \langle \phi_1 | (|\phi_2\rangle + 2|\phi_3\rangle) = \langle \phi_1 | (|\phi_2\rangle + |2\phi_3\rangle) = \langle \phi_1 | \phi_2 \rangle + 2\langle \phi_1 | \phi_3 \rangle = 0$$

$$\langle \phi_2 | H | \phi_3 \rangle = \langle \phi_2 | (|\phi_2\rangle + 2|\phi_3\rangle) = \langle \phi_2 | (|\phi_2\rangle + |2\phi_3\rangle) = \langle \phi_2 | \phi_2 \rangle + 2\langle \phi_2 | \phi_3 \rangle = 1$$

La matrice qui représente l'opérateur H dans la base $\{ |\phi_i\rangle \}_{i=1,2,3}$ est :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{\{|\phi_i\rangle\}_{i=1,2,3}}$$

1-

◆ Calculons les valeurs propres E_i de H

Remarque la valeur $\lambda_1 = 1$ est une valeur propre de H correspondant au vecteur propre $|\phi_1\rangle$

car $H|\phi_1\rangle = 1|\phi_1\rangle$ est une équation aux valeurs propres.

Donc $|\mathcal{V}_1\rangle = |\phi_1\rangle$

On diagonalise la matrice réduite : $H' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{\{|\phi_i\rangle\}_{i=2,3}}$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

La solution est $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 3$

◆ Calculons les états propres $\{|V_i\rangle\}$ et de H dans la base $\{|\phi_i\rangle\}$

Nous avons donc trouvé les trois valeurs propres $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 3$

La valeur 1 est dégénérée deux fois

- Calculons l'état propre $|V_2\rangle$ correspondant à la valeur propre $\lambda_2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_2 & 1 \\ 1 & 2-\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = 0 \Rightarrow \alpha = -\beta$$

$$\text{Or } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \Rightarrow 2|\alpha|^2 = 1 \Rightarrow |\alpha|^2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{On prend } \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \beta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Donc } |V_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_2\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_3\rangle$$

- Calculons l'état propre $|V_3\rangle$ correspondant à la valeur propre $\lambda_3 = 3$

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_3 & 1 \\ 1 & 2-\lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha - \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta$$

$$\text{Or } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \Rightarrow 2|\alpha|^2 = 1 \Rightarrow |\alpha|^2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{On prend } \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Donc } |V_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_3\rangle$$

2-

◆ les projecteurs associés aux valeurs propres

$$\text{Pour } \lambda_1 = 1 \Rightarrow P_{\lambda_1} = |V_1\rangle\langle V_1| = |\phi_1\rangle\langle\phi_1|$$

$$\begin{aligned} \text{Pour } \lambda_2 = 1 \Rightarrow P_{\lambda_2} &= |V_2\rangle\langle V_2| = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_2\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_3\rangle \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle\phi_2| - \frac{1}{\sqrt{2}}\langle\phi_3| \right) \\ &= \frac{1}{2}|\phi_2\rangle\langle\phi_2| - \frac{1}{2}|\phi_2\rangle\langle\phi_3| - \frac{1}{2}|\phi_3\rangle\langle\phi_2| + \frac{1}{2}|\phi_3\rangle\langle\phi_3| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Pour } \lambda_3 = 3 \Rightarrow P_{\lambda_3} &= |V_3\rangle\langle V_3| = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_3\rangle \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle\phi_2| + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle\phi_3| \right) \\ &= \frac{1}{2}|\phi_2\rangle\langle\phi_2| + \frac{1}{2}|\phi_2\rangle\langle\phi_3| + \frac{1}{2}|\phi_3\rangle\langle\phi_2| + \frac{1}{2}|\phi_3\rangle\langle\phi_3| \end{aligned}$$

◆ la relation de fermeture

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 |V_i\rangle\langle V_i| &= |V_1\rangle\langle V_1| + |V_2\rangle\langle V_2| + |V_3\rangle\langle V_3| \\ &= |\phi_1\rangle\langle\phi_1| + \frac{1}{2}|\phi_2\rangle\langle\phi_2| - \frac{1}{2}|\phi_2\rangle\langle\phi_3| - \frac{1}{2}|\phi_3\rangle\langle\phi_2| + \frac{1}{2}|\phi_3\rangle\langle\phi_3| \\ &\quad + \frac{1}{2}|\phi_2\rangle\langle\phi_2| + \frac{1}{2}|\phi_2\rangle\langle\phi_3| + \frac{1}{2}|\phi_3\rangle\langle\phi_2| + \frac{1}{2}|\phi_3\rangle\langle\phi_3| \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^3 |\psi_i\rangle\langle\psi_i| = |\phi_1\rangle\langle\phi_1| + |\phi_2\rangle\langle\phi_2| + |\phi_3\rangle\langle\phi_3| = 1$$

2- Montrer que $\{|\psi_i\rangle\}$ constitue aussi une base orthonormée

Nous avons montré que $\{|\psi_i\rangle\}$ vérifie la relation de fermeture

Il suffit de vérifier que $\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \delta_{ij}$

Exercice 6.

Soit $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ une base canonique d'un espace à trois dimensions. Dans cette base canonique, la représentation matricielle de ces vecteurs est donc :

$$|u_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |u_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |u_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{On définit : } |V\rangle = \frac{|u_1\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{|u_2\rangle}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad |W\rangle = \frac{|u_1\rangle}{2} - \frac{|u_2\rangle}{2} + i\frac{|u_3\rangle}{\sqrt{2}}$$

1)

- Donner la représentation matricielle de $|V\rangle$

$$|V\rangle = \begin{pmatrix} \langle u_1|V\rangle \\ \langle u_2|V\rangle \\ \langle u_3|V\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u_1|\left(\frac{|u_1\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{|u_2\rangle}{\sqrt{2}}\right) \\ \langle u_2|\left(\frac{|u_1\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{|u_2\rangle}{\sqrt{2}}\right) \\ \langle u_3|\left(\frac{|u_1\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{|u_2\rangle}{\sqrt{2}}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\langle u_1|u_1\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{\langle u_1|u_2\rangle}{\sqrt{2}} \\ \frac{\langle u_2|u_1\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{\langle u_2|u_2\rangle}{\sqrt{2}} \\ \frac{\langle u_3|u_1\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{\langle u_3|u_2\rangle}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Donner la représentation matricielle de $\langle V|$

$$\langle V| = (|V\rangle)^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

- Donner la représentation matricielle de $|W\rangle$.

$$|W\rangle = \begin{pmatrix} \langle u_1 | W \rangle \\ \langle u_2 | W \rangle \\ \langle u_3 | W \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u_1 | \left(\frac{|u_1\rangle}{2} - \frac{|u_2\rangle}{2} + i \frac{|u_3\rangle}{\sqrt{2}} \right) \rangle \\ \langle u_2 | \left(\frac{|u_1\rangle}{2} - \frac{|u_2\rangle}{2} + i \frac{|u_3\rangle}{\sqrt{2}} \right) \rangle \\ \langle u_3 | \left(\frac{|u_1\rangle}{2} - \frac{|u_2\rangle}{2} + i \frac{|u_3\rangle}{\sqrt{2}} \right) \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

- Donner la représentation matricielle de $|\phi\rangle = \frac{|V\rangle}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} |W\rangle$
- Donner la représentation matricielle de $|V\rangle\langle V|$.

Exercice 7: Dénoteons par E l'espace vectoriel des états d'un système physique. Cet espace est défini à trois dimensions par la donnée de la base orthonormée complète $\{|u_i\rangle\}_{i=1,2,3}$. Soient

$$1) \quad |\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |u_1\rangle + \frac{i}{2} |u_2\rangle + \frac{1}{2} |u_3\rangle \quad \text{et} \quad |\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |u_1\rangle - \frac{i}{2} |u_2\rangle + \frac{1}{2} |u_3\rangle$$

- Déterminer les normes de $|\Psi_0\rangle$ et $|\Psi_1\rangle$

$$\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

$$\langle \Psi_1 | \Psi_1 \rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

- Calculer explicitement les opérateurs de projection P_0 et P_1 sur les états $|\Psi_0\rangle$ et $|\Psi_1\rangle$ respectivement. On demande de représenter ces quantités par des matrices 3x3.

$$|\Psi_0\rangle\langle\Psi_0| = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{i}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{4} & \frac{i}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{-i}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$|\psi_1\rangle\langle\psi_1| = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{4} & -\frac{i}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{i}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

c) Vérifier que P_0 et P_1 sont des projecteurs sur $|\Psi_0\rangle$ et $|\Psi_1\rangle$ respectivement.

$$P_0^2 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|\psi_0\rangle\langle\psi_0| = |\psi_0\rangle\langle\psi_0| = P_0$$

$$P_1^2 = |\psi_1\rangle\langle\psi_1|\psi_1\rangle\langle\psi_1| = |\psi_1\rangle\langle\psi_1| = P_1$$

Donc P_0 et P_1 sont des projecteurs

Exercice 8: Soit $\{|U_1\rangle, |U_2\rangle\}$ une base de l'espace des états E. Les matrices de Pauli sont définies par :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1) Quelles sont les valeurs propres et vecteurs propres associés à ces opérateurs.

◆ **Pour l'opérateur σ_x**

Cherchons les valeurs propres

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

Cherchons les vecteurs propres

Pour $\lambda = +1$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $\Rightarrow \alpha - \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta$
- Or $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \Rightarrow 2|\alpha|^2 = 1 \Rightarrow |\alpha|^2 = \frac{1}{2}$
- On prend $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$
- Donc $|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|U_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|U_2\rangle$

Pour $\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $\Rightarrow \alpha + \beta = 0 \Rightarrow \alpha = -\beta$
- Or $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \Rightarrow 2|\alpha|^2 = 1 \Rightarrow |\alpha|^2 = \frac{1}{2}$
- On prend $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \beta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
- Donc $|\Psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|U_1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|U_2\rangle$

◆ **Pour l'opérateur σ_y**

Cherchons les valeurs propres

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -i \\ i & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + i^2 = \lambda^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

Cherchons les vecteurs propres

Pour $\lambda = +1$

$$\begin{pmatrix} -1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $\Rightarrow \alpha + i\beta = 0 \Rightarrow \alpha = -i\beta$
- Or $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \Rightarrow 2|\alpha|^2 = 1 \Rightarrow |\alpha|^2 = \frac{1}{2}$
- On prend $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$
- Donc $|\sigma_{y1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|U_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|U_2\rangle$

De meme pour $\lambda = -1$

- Donc $|\sigma_{y2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|U_1\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|U_2\rangle$

2) Calculer $\sigma_i \sigma_j$; $[\sigma_i, \sigma_j]$; $\{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i, \sigma_j + \sigma_j, \sigma_i$ et $tr(\sigma_i, \sigma_j)$ pour tout i,j

Exercice 10: Soit $\{|U_1\rangle, |U_2\rangle\}$ une base de l'espace des états E et soit M une matrice 2x2 :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & i\sqrt{2} \\ -i\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$$

a) M est hermitique. car

$$M = \begin{pmatrix} 2 & i\sqrt{2} \\ -i\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^+ = \begin{pmatrix} 2 & i\sqrt{2} \\ -i\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix} \quad M = M^+$$

b)

◆ les valeurs propres associées à M.

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & i\sqrt{2} \\ -i\sqrt{2} & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 = (2 - \lambda)(3 - \lambda) - 2$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0$$

Les valeurs propres sont $\lambda = 1$ et $\lambda = 4$

◆ Les vecteurs propres associés à M

- Pour $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & i\sqrt{2} \\ -i\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |V_1\rangle = -\frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|U_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|U_2\rangle$$

- Pour $\lambda = 4$

$$\begin{pmatrix} -2 & i\sqrt{2} \\ -i\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |V_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|U_1\rangle - \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|U_2\rangle$$

c) les projecteurs associés aux valeurs propres .

$$P_{\lambda=1} = |V_1\rangle\langle V_1| = \begin{pmatrix} -\frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$P_{\lambda=4} = |V_2\rangle\langle V_2| = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ -\frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{La relation de fermeture : } |V_1\rangle\langle V_1| + |V_2\rangle\langle V_2| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \Pi$$