

Mécanique quantique – SMC (2014 – 2015)

Série N° 6 (Facultatif)

Exercice N°1

Soit un système physique décrit, à un instant $t=0$, par le vecteur état $|\phi\rangle$ et soit $\{|V_i\rangle\}_{i=1,2,3,4}$ une base orthonormée. Dans cette base, l'opérateur Hamiltonien H s'écrit:

$$H|V_1\rangle = \hbar\omega|V_1\rangle, \quad H|V_2\rangle = 0$$

$$H|V_3\rangle = -\hbar\omega|V_3\rangle, \quad H|V_4\rangle = 3\hbar\omega|V_4\rangle$$

Le vecteur état $|\phi\rangle$ est une combinaison linéaire de quatre vecteurs normés:

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|V_1\rangle + \frac{1}{2}|V_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}}|V_3\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}}|V_4\rangle$$

- 1) Quelle est la norme de $|\phi\rangle$?
- 2) On mesure, à $t = 0$, l'énergie du système. Quelle est la probabilité d'obtenir 0?
- 3) Lors d'une mesure de H sur $|\phi\rangle$, quelle est la probabilité de trouver le système dans l'état $|V_3\rangle$?
- 4) Quelle est la valeur moyenne de l'opérateur H pour $|\phi\rangle$?
- 5) Quelle est la probabilité d'obtenir précisément cette valeur moyenne lorsque l'on mesure l'observable associée à l'opérateur H pour $|\phi\rangle$?
- 6) Quel est l'écart quadratique moyen correspondant à cette valeur moyenne?
- 7) Quelles sont les conditions nécessaires pour qu'un ensemble d'opérateurs constitue un ECOC. L'ensemble $\{H\}$ vérifie-t-il ces conditions?
- 8) On fait évoluer le vecteur état $|\phi\rangle$, dans le temps. Donner l'expression de $|\phi(t)\rangle$. Quelle serait la probabilité de trouver le système dans l'état $|V_3\rangle$? Conclusion?

Exercice N° 2

On considère un système physique dont l'espace des états, à trois dimensions, est rapporté à la base orthonormée formée par les trois kets $|\phi_1\rangle$, $|\phi_2\rangle$, $|\phi_3\rangle$. Dans la base de ces vecteurs, l'opérateur Hamiltonien H s'écrit:

$$H = \begin{bmatrix} E_0 & \frac{E_0}{2\sqrt{2}} & \frac{E_0}{2\sqrt{2}} \\ \frac{E_0}{2\sqrt{2}} & E_0 & 0 \\ \frac{E_0}{2\sqrt{2}} & 0 & E_0 \end{bmatrix}$$

à l'instant $t=0$, le système physique est décrit par $|\psi(0)\rangle = |\phi_1\rangle$.

- 1) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de H
- 2) On effectue une mesure de l'énergie à l'instant $t=0$. Quelles valeurs peut-on trouver?, avec quelles probabilités?
- 3) On suppose que le résultat de la mesure est $E_0/2$. Quel est l'état du système juste après la mesure?, Quelle est l'influence de la mesure?
- 4) calculer $|\psi(t)\rangle$ à un instant t donné. Le système à-t-il évolué?
- 5) Calculer la valeur moyenne $\langle H \rangle$ dans l'état $|\psi(0)\rangle$. Calculer de deux façons différentes $\langle H \rangle$ dans l'état $|\psi(t)\rangle$

Exercice N° 3

On considère que l'espace des états à trois dimensions est rapporté à la base orthonormée $\{|u_i\rangle\}_{i=1,2,3}$. L'hamiltonien M et deux observables A et B sont représentées par les matrices.

$$H = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ω_0 , a et b sont des constantes réelles positives. A l'instant $t=0$ le système physique est décrit par : $|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|U_1\rangle + \frac{1}{2}|U_2\rangle + \frac{1}{2}|U_3\rangle$

- 1) On mesure à $t = 0$ l'énergie du système, quelles valeurs peut-on trouver et avec quelles probabilités ? Calculer dans l'état $|\Psi(0)\rangle$, $\langle H \rangle$ et ΔH
- 2) Au lieu de mesurer H à $t = 0$, on mesure A. Quels sont les résultats possibles et leurs probabilités ? Quel est le vecteur d'état immédiatement après la mesure ? H et A forment-elles un E.C.O.C
- 3) Calculer les valeurs moyennes à l'instant t $\langle A \rangle_t$, $\langle B \rangle_t$
- 4) Quels résultats obtient-on si l'on mesure l'observable A à l'instant t .

Exercice N° 4

On considère un système physique dont l'espace des états qui est à trois dimensions est rapporté à la base orthonormée formée par les kets $\{|\phi_i\rangle\}_{i=1,2,3}$. H et A sont représentés par les matrices :

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1- A est-il hermitique?
- 2- Calculer ses valeurs propres et ses vecteurs propres dont on donnera une forme normalisée.
- 3- Vérifier qu'ils sont orthogonaux.
- 4- Calculer les matrices représentant les projecteurs sur les vecteurs propres, vérifier que ceux-ci satisfont à la relation de fermeture.
- 5- Déterminer les valeurs propres et états propres de H dans la base $\{|\phi_i\rangle\}$. Le spectre de ces opérateurs est-il dégénéré ?
- 6- Supposons qu'à $t=0$, le système physique est décrit par $|\psi(0)\rangle = |\phi_1\rangle$.
 - a- Quels sont les valeurs possibles pour une mesure, à $t=0$, de H ou de A et avec quelles probabilités
 - a- Quels sont les valeurs possibles pour une mesure, à $t=0$, de H ou de A et avec quelles probabilités
 - b- Quelle est la probabilité de trouver le système dans l'état $|\nu_2\rangle$?
 - c- Montrer si ces opérateurs forment un ECOG ?
- 7- Le système physique a maintenant évolué dans le temps.
 - a- Donner l'expression pour $|\psi(t)\rangle$ au temps, t, différent de zéro.
 - b- Le système peut-il se trouver dans l'état $|\phi_3\rangle$, si oui avec quelle probabilité.
 - c- A quel instant, $t \neq 0$, le système ne peut se trouver que dans l'état $|\phi_1\rangle$

Mécanique quantique – SMC (2014 – 2015)

Correction de la Série N° 6 (Facultatif)

Solution de l'exercice N° 1

les quatre équations sont des équations aux valeurs propres: $\hbar\omega$, 0, $-\hbar\omega$ et $3\hbar\omega$. Les quatre vecteurs propres constituent une base orthonormée.

1) Le vecteur état $|\phi\rangle$ est combinaison linéaire des vecteurs de la base orthonormée.

$$\langle\phi|\phi\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4+2+1+1}{8} = 1$$

2) La probabilité d'observer la valeur propre 0 est : $P_0 = \frac{|\langle V_2|\phi\rangle|^2}{\langle\phi|\phi\rangle} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

3) La probab de trouver le système dans l'état $|V_3\rangle$ est :

$$P_{|V_3\rangle} = \frac{|\langle V_3|\phi\rangle|^2}{\langle\phi|\phi\rangle} = \frac{1}{\sqrt{8}} \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{8}$$

$$4) \langle H \rangle = \frac{\langle\phi|H|\phi\rangle}{\langle\phi|\phi\rangle} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hbar\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hbar\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3\hbar\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{8}} \\ \frac{1}{\sqrt{8}} \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \hbar\omega$$

5) La probabilité est nulle, car la valeur propre $3\hbar\omega/4$ ne correspond à aucune des valeurs propres de H.

6) l'écart quadratique moyen

$$(\Delta H)^2 = \langle (H - \langle H \rangle)^2 \rangle = \langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2 \quad \text{Or} \quad \langle H \rangle^2 = \frac{9\hbar^2\omega^2}{16}$$

$$\langle H^2 \rangle = \frac{\langle\phi|H^2|\phi\rangle}{\langle\phi|\phi\rangle} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hbar^2\omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hbar^2\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9\hbar^2\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{8}} \\ \frac{1}{\sqrt{8}} \end{pmatrix} = \frac{14}{8} \hbar^2\omega^2$$

$$(\Delta H)^2 = \frac{14}{8} \hbar^2\omega^2 - \frac{9}{16} \hbar^2\omega^2 = \frac{19}{16} \hbar^2\omega^2$$

7) Conditions :

- Les opérateurs sont des observables (hérmitique + l'ensemble des vecteurs propres de chaque opérateur constitue une base orthonormée)
- Les observables commutent deux à deux
- Il existe une base orthonormée de vecteurs propres commune à l'ensemble des observables et cette base est unique

L'ensemble $\{H\}$ vérifie t il ces conditions ?

- H est hérmitique et l'ensemble des vecteurs propres de H $\{|V_i\rangle\}_{i=1,2,3,4}$ constitue une base orthonormée
- $[H,H]=0$
- La base de vecteurs propres de H est unique car aucune valeur propre n'est dégénérée.

Donc l'ensemble $\{H\}$ est un ECO

$$\begin{aligned}
 8) |\phi(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} |\phi\rangle = \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}}{\sqrt{2}} |V_1\rangle + \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}}{2} |V_2\rangle + \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}}{\sqrt{8}} |V_3\rangle + \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}}{\sqrt{8}} |V_4\rangle \\
 &= \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2}} |V_1\rangle + \frac{1}{2} |V_2\rangle + \frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{8}} |V_3\rangle + \frac{e^{-i3\omega t}}{\sqrt{8}} |V_4\rangle
 \end{aligned}$$

La probabilité de trouver le système dans l'état $|V_3\rangle$ est :

$$P_{|V_3\rangle} = \frac{|\langle V_3 | \phi(t) \rangle|^2}{\langle \phi(t) | \phi(t) \rangle} = \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{8}} \frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{8}} = \frac{1}{8}$$

Conclusion : cette probabilité reste inchangée dans le temps

Solution de l'exercice N° 2

$$H = \begin{pmatrix} E_0 & \frac{E_0}{2\sqrt{2}} & \frac{E_0}{2\sqrt{2}} \\ \frac{E_0}{2\sqrt{2}} & E_0 & 0 \\ \frac{E_0}{2\sqrt{2}} & 0 & E_0 \end{pmatrix}$$

1- Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de H

$$\begin{vmatrix} E_0 - \lambda & \frac{E_0}{2\sqrt{2}} & \frac{E_0}{2\sqrt{2}} \\ \frac{E_0}{2\sqrt{2}} & E_0 - \lambda & 0 \\ \frac{E_0}{2\sqrt{2}} & 0 & E_0 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

valeur propre associée	Vecteur propre de H
$E_1 = \frac{E_0}{2}$	$ V_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_1\rangle - \frac{1}{2} \phi_2\rangle + \frac{1}{2} \phi_3\rangle$
$E_2 = E_0$	$ V_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_2\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_3\rangle$
$E_3 = \frac{3E_0}{2}$	$ V_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_1\rangle + \frac{1}{2} \phi_2\rangle + \frac{1}{2} \phi_3\rangle$

- 2- On effectue une mesure de l'énergie à l'instant $t=0$. Les valeurs que nous pouvons trouver sont les valeurs propres de H.

$$P_{\left(\frac{E_0}{2}\right)} = |\langle V_1 | \psi(0) \rangle|^2 = |\langle V_1 | \phi_1 \rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

$$P_{(E_0)} = |\langle V_2 | \psi(0) \rangle|^2 = |\langle V_2 | \phi_1 \rangle|^2 = 0$$

$$P_{\left(\frac{3E_0}{2}\right)} = |\langle V_3 | \psi(0) \rangle|^2 = |\langle V_3 | \phi_1 \rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

- 3- On suppose que le résultat de la mesure est $\frac{E_0}{2} \Rightarrow$ le système est dans l'état $|V_1\rangle$.

L'état du système juste après la mesure est :

$$|W\rangle = \frac{P_{V_1} |\psi(0)\rangle}{\sqrt{\langle \psi(0) | P_{V_1} | \psi(0) \rangle}} \text{ avec } P_{V_1} = \frac{|V_1\rangle \langle V_1|}{\langle V_1 | V_1 \rangle} = |V_1\rangle \langle V_1|$$

$$|W\rangle = \frac{|V_1\rangle \langle V_1 | \phi_1 \rangle}{\sqrt{\langle \phi_1 | V_1 \rangle \langle V_1 | \phi_1 \rangle}}$$

$$|V_1\rangle \langle V_1 | \phi_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |V_1\rangle, \quad \langle \phi_1 | V_1 \rangle \langle V_1 | \phi_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \phi_1 | V_1 \rangle = \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc } |W\rangle = |V_1\rangle$$

C'est l'état où se trouve le système. Donc la mesure n'a pas perturbé le système.

- 4- Calculer $|\psi(t)\rangle$ à un instant t .

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-0)} |\psi(0)\rangle$$

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar} H t} |\phi_1\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} H t} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |V_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |V_3\rangle \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{iE_0}{2\hbar} t} |V_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i3E_0}{2\hbar} t} |V_3\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{iE_0}{2\hbar} t} \left(|V_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{iE_0}{\hbar} t} |V_3\rangle \right) \neq |\psi(0)\rangle \end{aligned}$$

Puisque $|\psi(t)\rangle \neq |\psi(0)\rangle$ on peut dire que le système a évolué dans le temps

5- Calculer la valeur moyenne $\langle H \rangle$ dans l'état $|\psi(0)\rangle$.

$$\begin{aligned}\langle H \rangle_0 &= \langle \psi(0) | H | \psi(0) \rangle = \langle \phi_1 | H | \phi_1 \rangle \\ &= (1 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} E_0 & \frac{E_0}{2\sqrt{2}} & \frac{E_0}{2\sqrt{2}} \\ \frac{E_0}{2\sqrt{2}} & E_0 & 0 \\ \frac{E_0}{2\sqrt{2}} & 0 & E_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = E_0\end{aligned}$$

Calculer de deux façons différentes $\langle H \rangle$ dans l'état $|\psi(t)\rangle$.

$$\begin{aligned}\langle H \rangle_t &= \langle \psi(t) | H | \psi(t) \rangle = \frac{1}{2} \left(\langle V_1 | + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{iE_0 t}{\hbar}} \langle V_3 | \right) H \left(|V_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{iE_0 t}{\hbar}} |V_3\rangle \right) \\ \langle H \rangle_t &= E_0\end{aligned}$$

$\Rightarrow \langle H \rangle_t = \langle H \rangle_0$ Au cours du temps la valeur moyenne n'a pas varié

Solution de l'exercice N° 4

- 1- A est réel et symétrique par rapport à la diagonale donc il est hermitique
- 2- Cherchons les valeurs propres

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & \frac{\hbar}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{\hbar}{\sqrt{2}} & 0 - \lambda & \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\hbar}{\sqrt{2}} & 0 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow -\lambda(\lambda^2 - \frac{\hbar^2}{2}) - \frac{\hbar}{\sqrt{2}}(\frac{-\lambda\hbar}{\sqrt{2}}) = 0$$

$$-\lambda(\lambda^2 - \frac{\hbar^2}{2}) + \frac{\lambda\hbar^2}{2} = 0$$

$$-\lambda^3 + \lambda\hbar^2 = 0$$

$$\lambda(\lambda^2 - \hbar^2) = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - \hbar)(\lambda + \hbar) = 0$$

Les valeurs propres sont donc $\lambda = \hbar$, $\lambda = 0$, $\lambda = -\hbar$

Cherchons les vecteurs propres

Pour $\lambda = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 - 0 & \frac{\hbar}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{\hbar}{\sqrt{2}} & 0 - 0 & \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\hbar}{\sqrt{2}} & 0 - 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \beta \frac{\hbar}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow \\ \alpha \frac{\hbar}{\sqrt{2}} + \gamma \frac{\hbar}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = -\gamma \end{cases} \\ \beta \frac{\hbar}{\sqrt{2}} = 0 \end{cases}$$

D'après la Relation de normalisation

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1 \Rightarrow |\alpha|^2 + |\gamma|^2 = 1 \Rightarrow |\alpha|^2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{donc } \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \beta = 0 \quad \text{et } \gamma = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Le vecteur propre $|\mathcal{W}_1\rangle$ associé à $\lambda = 0$ s'écrit donc : $|\mathcal{W}_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_3\rangle$

Pour $\lambda = \hbar$

$$\begin{pmatrix} 0-\hbar & \frac{\hbar}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{\hbar}{\sqrt{2}} & 0-\hbar & \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\hbar}{\sqrt{2}} & 0-\hbar \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -\alpha\hbar + \beta\frac{\hbar}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow \\ \alpha\frac{\hbar}{\sqrt{2}} - \beta\hbar + \gamma\frac{\hbar}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow \\ \beta\frac{\hbar}{\sqrt{2}} - \gamma\hbar = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\beta}{\sqrt{2}} \\ \gamma = \frac{\beta}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

D'après la relation de normalisation $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1 \Rightarrow 2|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$
donc $\alpha = \gamma = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Le vecteur propre $|W_2\rangle$ associé à $\lambda = \hbar$ s'écrit donc : $|W_2\rangle = \frac{1}{2}|\phi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_2\rangle + \frac{1}{2}|\phi_3\rangle$

Pour $\lambda = -\hbar$

$$\begin{pmatrix} 0+\hbar & \frac{\hbar}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{\hbar}{\sqrt{2}} & 0+\hbar & \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\hbar}{\sqrt{2}} & 0+\hbar \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha\hbar + \beta\frac{\hbar}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow \\ \alpha\frac{\hbar}{\sqrt{2}} + \beta\hbar + \gamma\frac{\hbar}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow \\ \beta\frac{\hbar}{\sqrt{2}} + \gamma\hbar = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{\beta}{\sqrt{2}} \\ \gamma = -\frac{\beta}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

D'après la relation de normalisation $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1 \Rightarrow 2|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$
donc $\alpha = \gamma = \frac{1}{2}$ et $\beta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Le vecteur propre $|W_3\rangle$ associé à $\lambda = -\hbar$ s'écrit donc : $|W_3\rangle = \frac{1}{2}|\phi_1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_2\rangle + \frac{1}{2}|\phi_3\rangle$

3- Vérifier qu'ils sont orthogonaux.

$$\langle W_1 | W_2 \rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 0 \quad ; \quad \langle W_1 | W_3 \rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle W_2 | W_3 \rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 0 \quad ; \quad \langle W_1 | W_1 \rangle = \langle W_2 | W_2 \rangle = \langle W_3 | W_3 \rangle = 1$$

4- les projecteurs sur les vecteurs propres,

$$|w_1\rangle\langle w_1| = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

$$|w_2\rangle\langle w_2| = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$|w_3\rangle\langle w_3| = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{-1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$|w_1\rangle\langle w_1| + |w_2\rangle\langle w_2| + |w_3\rangle\langle w_3| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

5- les valeurs propres et états propres de H dans la base $\{|\phi_i\rangle\}$.

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On constate que $E_2 = 3\hbar\omega$ est déjà une valeur propre de H associée à $|\phi_2\rangle$

Vérifions que $H|\phi_2\rangle = 3\hbar\omega|\phi_2\rangle$

On diagonalise donc la matrice réduite : $H' = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}_{\{|\phi_1\rangle, |\phi_3\rangle\}}$

On procède de la même manière que pour A. On trouve les deux autres valeurs propres de H qui sont : $-\hbar\omega$, $3\hbar\omega$

pour la valeur propre $E_1 = -\hbar\omega$ on trouve le vecteur associé $|V_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_3\rangle$

pour la valeur propre $E_3 = \hbar\omega$ on trouve le vecteur associé $|V_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_3\rangle$

6- a- Les valeurs possibles pour une mesure de A sont les vecteurs propres de A

Vecteur propre de A	valeur propre associée	Probabilité
$ W_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_3\rangle$	$\lambda_1 = 0$	$P_{(0)} = \frac{ \langle W_1 \psi(0) \rangle ^2}{\langle \psi(0) \psi(0) \rangle} = \frac{1}{2}$
$ W_2\rangle = \frac{1}{2} \phi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_2\rangle + \frac{1}{2} \phi_3\rangle$	$\lambda_2 = \hbar$	$P_{(\hbar)} = \frac{ \langle W_2 \psi(0) \rangle ^2}{\langle \psi(0) \psi(0) \rangle} = \frac{1}{4}$
$ W_3\rangle = \frac{1}{2} \phi_1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_2\rangle + \frac{1}{2} \phi_3\rangle$	$\lambda_3 = -\hbar$	$P_{(-\hbar)} = \frac{ \langle W_3 \psi(0) \rangle ^2}{\langle \psi(0) \psi(0) \rangle} = \frac{1}{4}$

Les valeurs possibles pour une mesure de H sont les vecteurs propres de H

Vecteur propre de H	valeur propre associée	Probabilité
$ V_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_3\rangle$	$E_1 = -\hbar\omega$	$P_{(-\hbar\omega)} = \frac{ \langle V_1 \psi(0) \rangle ^2}{\langle \psi(0) \psi(0) \rangle} = \frac{1}{2}$
$ V_2\rangle = \phi_2\rangle$	$E_2 = 3\hbar\omega$	$P_{(3\hbar\omega)} = \frac{ \langle V_2 \psi(0) \rangle ^2}{\langle \psi(0) \psi(0) \rangle} + \frac{ \langle V_3 \psi(0) \rangle ^2}{\langle \psi(0) \psi(0) \rangle} = \frac{1}{2}$
$ V_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_3\rangle$	$E_3 = 3\hbar\omega$	

$$\text{b- } P_{(V_2)} = \frac{|\langle V_2 | \psi(0) \rangle|^2}{\langle \psi(0) | \psi(0) \rangle} = 0$$

c- Pour l'ensemble $\{A\}$:

- L'opérateur A est Hermétique. La base de ses vecteurs propres est orthonormée. Il constitue donc une observable.
- $[A, A] = 0$
- $\{|W_i\rangle\}_{i=1,2,3}$ est une base de vecteurs propres de A et les valeurs propres sont non dégénérées. Donc $\{A\}$ constitue à lui seul un ECOC.

Pour l'ensemble $\{H\}$:

- L'opérateur H est Hermétique. La base de ses vecteurs propres est orthonormée. Il constitue donc une observable.
- $[H, H] = 0$
- $\{|V_i\rangle\}_{i=1,2,3}$ est une base de vecteurs propres de H et la valeur propre $3\hbar\omega$ est deux fois dégénérée. Donc $\{H\}$ ne constitue pas à lui seul un ECOC.

Pour l'ensemble $\{A, H\}$:

- Les opérateurs A et H sont Hermétiques. Les bases de leurs vecteurs propres sont orthonormées. Ils constituent donc des observables.
- $[H, A] = 0$ est-il vrai ?

$$HA = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar^2\omega}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AH = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \hbar \omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar^2 \omega}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $[H, A] = HA - AH = 0$

- Cherchons la base des vecteurs propres commune à A et H

$\{|\phi_i\rangle\}_{i=1,2,3}$ n'est pas une base de vecteurs propres

$\{|V_i\rangle\}_{i=1,2,3}$ est une base de vecteurs propres de H . Est-elle aussi base de vecteurs propres de A ?

$$\text{Non car } A|V_2\rangle = A|\phi_2\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \alpha |\phi_2\rangle$$

$\{|W_i\rangle\}_{i=1,2,3}$ est une base de vecteurs propres de A. Est-elle aussi base de vecteurs propres de H ?

$$H|W_1\rangle = \hbar \omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 3\hbar \omega \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 3\hbar \omega |W_1\rangle$$

$$H|W_2\rangle = \hbar \omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 3\hbar \omega \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 3\hbar \omega |W_2\rangle$$

$$H|W_3\rangle = \hbar \omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 3\hbar \omega \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 3\hbar \omega |W_3\rangle$$

Oui $\{|W_i\rangle\}_{i=1,2,3}$ est aussi base de vecteurs propres de H

Résumons les résultats pour $\{|W_i\rangle\}_{i=1,2,3}$

Vecteur propre de A	valeur propre associée à A	valeur propre associée à H	AH
$ W_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_3\rangle$	$\lambda_1 = 0$	$3\hbar \omega$	$(0, 3\hbar \omega)$
$ W_2\rangle = \frac{1}{2} \phi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_2\rangle + \frac{1}{2} \phi_3\rangle$	$\lambda_2 = \hbar$	$3\hbar \omega$	$(\hbar, 3\hbar \omega)$
$ W_3\rangle = \frac{1}{2} \phi_1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_2\rangle + \frac{1}{2} \phi_3\rangle$	$\lambda_3 = -\hbar$	$3\hbar \omega$	$(-\hbar, 3\hbar \omega)$

Or à chaque couple de valeurs propres correspond un et un seul vecteur propre.

Donc la base des $\{|\mathcal{W}_i\rangle\}_{i=1,2,3}$ est une base de vecteur propre commune à A et H et elle est unique. Donc $\{A, H\}$ est un ECOC.

7 Le système physique a maintenant évolué dans le temps.

a- Donner l'expression pour $|\psi(t)\rangle$ au temps, t, différent de zéro. $|\psi(0)\rangle = |\phi_1\rangle$

Pour obtenir $|\psi(t)\rangle$, $\forall t$, on doit appliquer l'opérateur évolution : $|\psi(t)\rangle = e^{\frac{-i}{\hbar}Ht} |\phi_1\rangle$

Nous devons écrire $|\phi_1\rangle$ dans la base des vecteurs propres de H avant de passer aux autres calculs.

$$\left\{ \begin{array}{l} |V_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_3\rangle \\ |V_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_3\rangle \end{array} \right\} \Rightarrow |\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|V_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|V_3\rangle$$

$$|\psi(t)\rangle = e^{\frac{-i}{\hbar}Ht} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|V_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|V_3\rangle \right) = \frac{e^{\frac{-i}{\hbar}Ht}}{\sqrt{2}}|V_1\rangle + \frac{e^{\frac{-i}{\hbar}Ht}}{\sqrt{2}}|V_3\rangle$$

$$|\psi(t)\rangle = \frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{2}}|V_1\rangle + \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2}}|V_3\rangle$$

b- Le système peut-il se trouver dans l'état $|\phi_3\rangle$, si oui avec quelle probabilité.

$$\begin{aligned} \langle \phi_3 | \psi(t) \rangle &= \langle \phi_3 | \left[\frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_3\rangle \right) + \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_3\rangle \right) \right] \\ &= \frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{2}} \langle \phi_3 | \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_3\rangle \right) + \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2}} \langle \phi_3 | \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_3\rangle \right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2}} = 0 \end{aligned}$$

Le système ne peut pas se trouver dans l'état $|\phi_3\rangle$ sa probabilité est nulle.

c- A quel instant, $t \neq 0$, le système ne peut se trouver que dans l'état $|\phi_1\rangle$

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \left[\frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_3\rangle \right) + \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_3\rangle \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{2}} + \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2}} \right) |\phi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{2}} + \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2}} \right) |\phi_3\rangle \\ &= \frac{1}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) |\phi_1\rangle + \frac{1}{2} (-e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) |\phi_3\rangle = \cos \omega t |\phi_1\rangle - i \sin \omega t |\phi_3\rangle \end{aligned}$$

le système ne peut se trouver que dans l'état $|\phi_1\rangle$ si $\sin \omega t = 0 \Rightarrow \omega t = n\pi \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{\omega}$