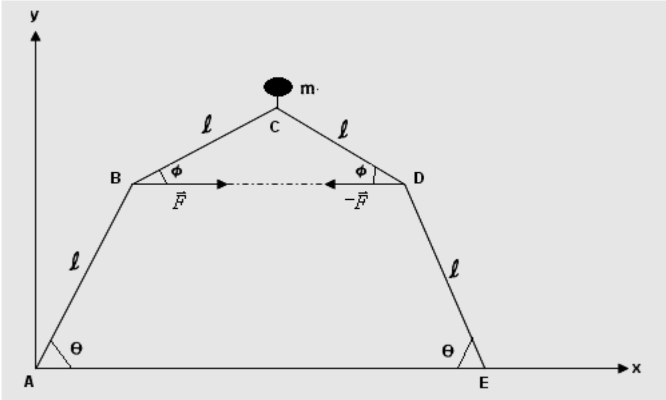
SMP 5 – Module 28

Travaux dirigés de mécanique analytique

Série N° 1

Exercice N° 1

On considère le système (S), on exerce en B et D une force $\vec{F}$ selon l'axe horizontal, en C est appliqué le poids $\vec{P}$ du à la masse m. Les barres sont de masse négligeables et toutes les liaisons sont parfaites.
Trouver la relation entre F et P lorsque le système est en équilibre sachant que θ, ϕ, et AE sont constantes (E point fixe).



Exercice N° 2

Soit un pendule de longueur **l** avec une masse placée dans un champs de pesanteur **g** et astreint à se déplacer dans un plan **(x, y)** muni de la base mobile $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta})$. La position du point **M** est repérée par $\vec{OM} = l\,\vec{u_r}$.

1- Calculer le nombre de degrés de liberté. En déduire que l'on peut décrire le système par la coordonnée θ.

2- Calculer la vitesse et déduire l'expression de l'énergie cinétique.

3- Calculer le travail effectué lors d'un déplacement virtuel $\vec{\delta r} = l\delta\theta\,\vec{u_\theta}$. En déduire l'expression de la composante de la force généralisée selon θ.

4- En utilisant la relation entre l'accélération généralisée et la force généralisée selon θ, déduire l'équation du mouvement en θ.

5- Calculer l'expression du Lagrangien et déduire l'équation du mouvement en utilisant l'équation de Lagrange.

Exercice N° 3

Soit une masse m astreinte à se déplacer sur une tige indéformable faisant un angle θ avec la verticale **OX**, en rotation imposée avec un vecteur de rotation $\vec{\Omega} = \Omega\,\vec{u_z}$. La masse est attachée à un ressort de constante de raideur **k** et de longueur à vide l_0 et glisse sans frottement. Elle est par ailleurs soumise à son poids. Ce système est à un degré de liberté, on choisit la distance $r = \|\vec{OM}\|$.
Le référentiel choisi est celui du laboratoire. Il est galiléen.

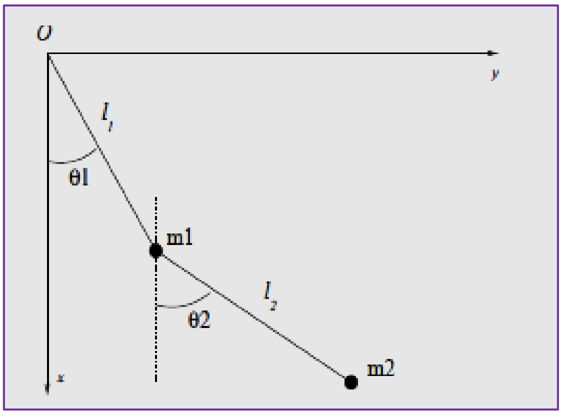
1- Calculer la vitesse et déduire l'énergie cinétique **T**.

2- Calculer la force généralisée associée à la coordonnée **r**.

3- En utilisant les équations de Lagrange, établir l'équation du mouvement.

Exercice N° 4

On utilise le formalisme de Lagrange pour étudier le système suivant : une masse ponctuelle m_1 est reliée par un fil supposé sans masse de longueur l_1 à un point fixe O.
Une seconde masse m_2 est reliée par un fil sans masse de longueur l_2 à m_1. Les deux masses ne peuvent pas se mouvoir que dans le plan vertical.



1- Définir les liaisons, le nombre de degrés de liberté et les coordonnées généralisées.

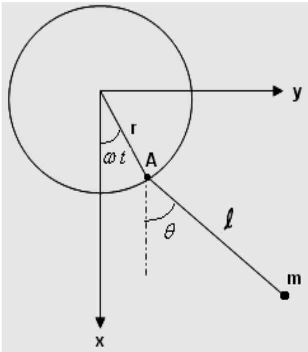
2- Calculer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle. En déduire l'expression du Lagrangien.

3- Trouver les équations du mouvement.

Exercice N° 5

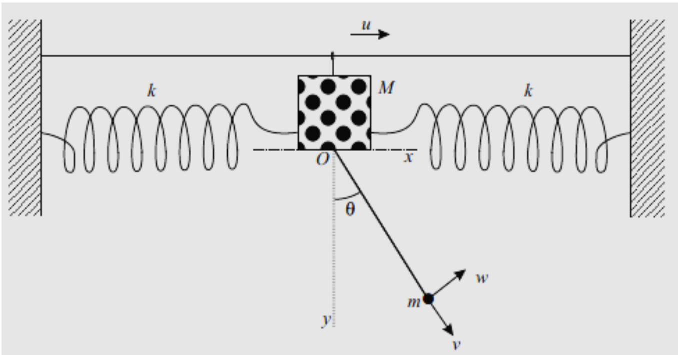
Dans un plan vertical oxy, on considère un pendule simple (l, m) dont le point de suspension A se déplace à vitesse angulaire constante ω, sur un cercle de rayon r.

Calculer le lagrangien du système et en déduire l'équation du mouvement.



Exercice N° 6

Soit un système mécanique bidimensionnel décrit par le schéma ci-dessous



1. Combien de degrés de liberté possède ce système ?
2. Ecrire son lagrangien
3. Ecrire les équations du mouvement.

Exercice N° 7

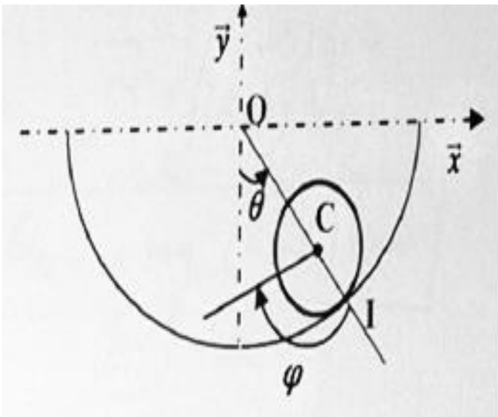
Un disque, pesant, homogène, de masse m et de rayon r, roule sans glisser à l'intérieur d'une circonférence de rayon $R > r$, situé dans un plan vertical.

1- Calculer l'énergie cinétique du système.

2- Calculer la force généralisée Q_θ (ou l'énergie potentielle U).

3- Par Lagrange de 2ème espèce, établir l'équation différentielle du système en fonction de θ.

4- En déduire l'équation différentielle dans le cas des petits mouvements et donner la pulsation propre.



Exercice N° 8

Soit le système formé par deux barres identiques AB et BC de même masse m, de même longueur L et de même moment d'inertie $I_G = m\frac{L^2}{12}$, articulées en A et B. Le coulisseau C de masse m$_C$ glisse le long de l'axe X. Le système est soumis à la force F appliqué au milieu de la barre BC et au moment M.

1- Par le principe des travaux virtuels, calculer le moment M à l'équilibre et déduire la force généralisée Q_θ.

2- Calculer l'énergie cinétique du système en fonction de m, m$_C$, θ et L.

3- Ecrire l'équation différentielle du mouvement du système en utilisant de 2ème espèce.