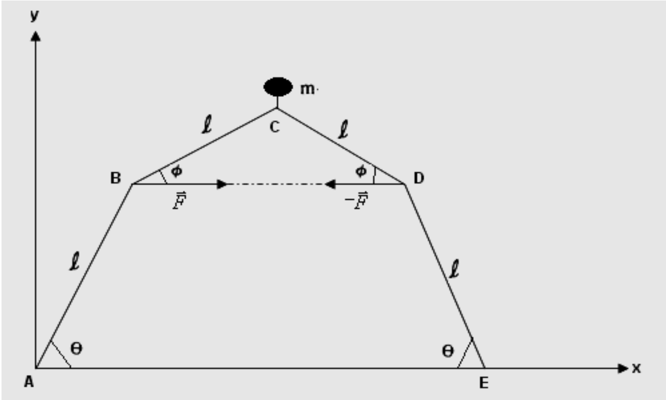
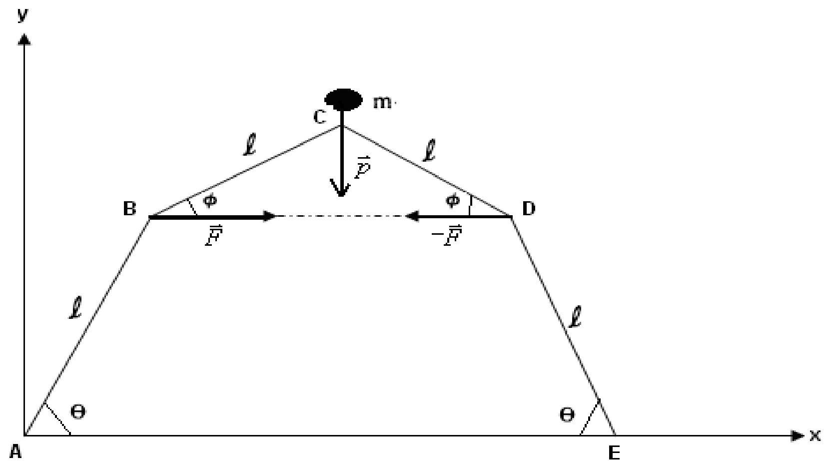
SMP 5 – Module 28
Travaux dirigés de mécanique analytique
Série N° 1

Exercice N° 1



On considère le système (S), on exerce en B et D une force $\vec{F}$ selon l'axe horizontal, en C est appliqué le poids $\vec{P}$ du à la masse m. Les barres sont de masse négligeables et toutes les liaisons sont parfaites.
Trouver la relation entre F et P lorsque le système est en équilibre sachant que θ, ϕ, et AE sont constantes (E point fixe).

Corrigé de l'exercice 1



Le système est en équilibre, donc d'après le principe du travail virtuel, on a :

$$\sum \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = 0$$

Puisque les liaisons sont parfaites, les seules forces qui travaillent sont $\vec{F}$ *et* $\vec{P}$ *:*

$$\vec{F}\,\delta\vec{r}_B - \vec{F}\,\delta\vec{r}_D + \vec{p}\,\delta\vec{r}_C = F\,\delta x_B - F\,\delta x_D - mg\,\delta y_C = 0$$

$$\begin{cases} x_B = l\cos\theta \\ x_D = l\cos\theta + 2l\cos\phi \\ y_C = l\sin\theta + l\sin\phi \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \delta x_B = -l\sin\theta\delta\theta \\ \delta x_D = -l\sin\theta\delta\theta - 2l\sin\phi\delta\phi \\ \delta y_C = l\cos\theta\delta\theta + l\cos\phi\delta\phi \end{cases}$$

$$-Fl\sin\theta\delta\theta + F(l\sin\theta\delta\theta + 2l\sin\phi\delta\phi) - mg(l\cos\theta\delta\theta + l\cos\phi\delta\phi) = 0$$

$$(2Fl\sin\phi - mgl\cos\phi)\delta\phi - mgl\cos\theta\delta\theta = 0$$

$$F\delta\phi = \frac{mg}{2}\left(\frac{\cos\phi}{\sin\phi}\delta\phi + \frac{\cos\theta}{\sin\phi}\delta\theta\right)$$

θ *et* ϕ *ne sont pas indépendants.*

En effet : $AE = 2l\cos\theta + 2l\cos\phi = Cte$ *d'où* $\delta AE = -2l(\sin\theta\delta\theta + \sin\phi\delta\phi) = 0$

$\delta\theta = -\frac{\sin\phi}{\sin\theta}\delta\phi$ *, en injectant cette expression dans la relation de la force, on obtient :*

$$F\delta\phi = \frac{mg}{2}\left(\frac{1}{tg\phi} - \frac{1}{tg\theta}\right)\delta\phi$$

$$F = \frac{mg}{2}\left(\frac{1}{tg\phi} - \frac{1}{tg\theta}\right)$$

Exercice N° 2

Soit un pendule de longueur **l** avec une masse placée dans un champs de pesanteur **g** et astreint à se déplacer dans un plan **(x, y)** muni de la base mobile $(\overrightarrow{\mathbf{u_r}}, \overrightarrow{\mathbf{u_\theta}})$. La position du point **M** est repérée par $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = \mathbf{l}\,\overrightarrow{\mathbf{u_r}}$.

1- Calculer le nombre de degrés de liberté. En déduire que l'on peut décrire le système par la coordonnée $\boldsymbol{\theta}$.

2- Calculer la vitesse et déduire l'expression de l'énergie cinétique.

3- Calculer le travail effectué lors d'un déplacement virtuel $\overrightarrow{\boldsymbol{\delta}\mathbf{r}} = \mathbf{l}\boldsymbol{\delta\theta}\,\overrightarrow{\mathbf{u_\theta}}$. En déduire l'expression de la composante de la force généralisée selon $\boldsymbol{\theta}$.

4- En utilisant la relation entre l'accélération généralisée et la force généralisée selon $\boldsymbol{\theta}$, déduire l'équation du mouvement en $\boldsymbol{\theta}$.

5- Calculer l'expression du Lagrangien et déduire l'équation du mouvement en utilisant l'équation de Lagrange.

Correction de l'exercice N° 2

Soit un pendule de longueur l avec une masse placée dans un champs de pesanteur g et astreint à se déplacer dans un plan (x, y) muni de la base mobile $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$. La position du point M est repérée par $\overrightarrow{OM} = l\overrightarrow{u_r}$. Soit R(O, x, y, z) le repère d'étude, munis de la base cartésienne $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, que l'on peut considérer comme galiléen. Oz est perpendiculaire au plan du mouvement et l'axe Ox est pris dans la direction descendante, d'où $\vec{g} = g\vec{\imath}$.

1. Le fil inextensible est sans masse et la masse peut être considérée sans volume et donc comme un point matériel. Le nombre de mouvements possibles est donc 3.

Comme le mouvement du pendule est dans le plan vertical (x, y), le nombre de mouvements se réduit à 2, et la position du pendule est contrainte par $z = 0$. Le fil étant inextensible, alors la distance qui sépare M de O est constante et égale à l et donc $x^2 + y^2 = l^2$, ce qui entraine un degré de liaison. Aussi, le nombre de degrés de liaison est 2 et donc le nombre de degrés de liberté est $3 - 2 = 1$. La coordonnée la mieux adaptée pour décrire le système est θ.

NDL= 3 – 2 = 1

2. Le vecteur position est $\overrightarrow{OM} = l\overrightarrow{u_r}$, ce qui donne pour la vitesse

$$\vec{V}(M/R) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = l\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$$

L'énergie cinétique dans R peut être déduite ainsi comme suit :

$$T = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

3. Considérons le déplacement virtuel, $\delta\vec{r} = l\delta\theta\overrightarrow{u_\theta}$, qui est confondu dans ce cas avec le déplacement réel. Le travail effectué est donné par :

$$\delta W = m\vec{g}.\delta\vec{r} = mgl\delta\theta\vec{\imath}.\overrightarrow{u_\theta} = -mglsin\theta\delta\theta$$

Or $\delta W = Q_\theta\delta\theta \Rightarrow Q_\theta = -mglsin\theta$, qui est la composante de la force généralisée selon la θ.

4- La composante généralisée de l'accélération selon θ est définie par

$$A_\theta = m\left.\frac{d\vec{V}}{dt}\right|_{\mathcal{R}}.\frac{\delta\vec{r}}{\delta\theta} = ml\left(\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} - \dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r}\right).l\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} = ml^2\ddot{\theta}$$

Nous savons grâce au principe de d'Alembert que :

$$A_\theta = Q_\theta \Rightarrow ml^2\ddot{\theta} = -mglsin\theta \Longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}sin\theta = 0.$$

5. Pour établir l'expression du lagrangien, nous avons besoin en plus de l'énergie cinétique de l'expression de l'énergie potentielle.

$$dV = -m\vec{g}\,.d\vec{r} = -mgld\theta\vec{\imath}\,.\overrightarrow{u_\theta} = mglsin\theta d\theta$$

ce qui donne $V = -mglcos\theta + C$. On peut prendre $C = 0$. Alors, l'expression du lagrangien est donnée ainsi par

$$L(\theta, d\theta, t) = T - V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mglcos\theta$$

En appliquant les équations de Lagrange, sachant que $\frac{\partial L}{\partial\theta} = -mglsin\theta$ et $\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}$, nous obtenons :

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = 0 \Longrightarrow -mglsin\theta - ml^2\ddot{\theta} = 0 \Longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}sin\theta = 0$$

Exercice N° 3

Soit une masse m astreinte à se déplacer sur une tige indéformable faisant un angle **θ** avec la verticale **OX**, en rotation imposée avec un vecteur de rotation $\vec{\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{\Omega}\,\overrightarrow{\boldsymbol{u_z}}$. La masse est attachée à un ressort de constante de raideur **k** et de longueur à vide $\mathbf{l_0}$ et glisse sans frottement. Elle est par ailleurs soumise à son poids. Ce système est à un degré de liberté, on choisit la distance $\mathbf{r} = \|\overrightarrow{\mathbf{OM}}\|$. Le référentiel choisi est celui du laboratoire. Il est galiléen.

1- Calculer la vitesse et déduire l'énergie cinétique **T**.

2- Calculer la force généralisée associée à la coordonnée **r**.

3- En utilisant les équations de Lagrange, établir l'équation du mouvement.

Correction de l'exercice N° 3

Soit une masse m astreinte à se déplacer sur une tige indéformable faisant un angle θ avec la verticale OX, en rotation imposée avec un vecteur de rotation $\vec{\Omega} = \Omega\,\overrightarrow{u_z}$. La masse est attachée à un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 et glisse sans frottement. Elle est par ailleurs soumise à son poids. Ce système est à un degré de liberté, on choisit la distance $r = |\overrightarrow{OM}|$. Le référentiel choisi est celui du laboratoire. Il est galiléen. Le mouvement a lieu dans le plan (Oxy). On prend Ox descendant.

1. La masselotte est un point matériel. Sa vitesse s'obtient par :

$$\vec{V}(M/R) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\Omega\overrightarrow{u_\theta}$$

L'énergie cinétique est ainsi donnée par

$$T = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\Omega^2)^2$$

2. Faisons le bilan des forces :

$\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{\imath}$: Poids

$F = -k(r - l_0)\overrightarrow{u_r}$: Force de rappel

$\vec{R} = \vec{N} = \|\vec{N}\|\overrightarrow{u_\theta}$: Réaction de la tige sur la masselotte (Pas de frottement).

La composante généralisée de la force selon r est donnée par :

$$\begin{aligned} Q_r &= \left(m\vec{g} + \vec{R} - k(r - l_0)\overrightarrow{u_r}\right).\frac{\partial\vec{r}}{\partial r} = \left(m\vec{g} + \vec{R} - k(r - l_0)\overrightarrow{u_r}\right).\overrightarrow{u_r} \\ &= mgcos\theta - k(r - l_0) \end{aligned}$$

3. L'équation de Lagrange selon r, exprimée en fonction de l'énergie cinétique et des forces généralisées, est donnée dans ce cas par :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{r}} - \frac{\partial T}{\partial r} = Q_r$$

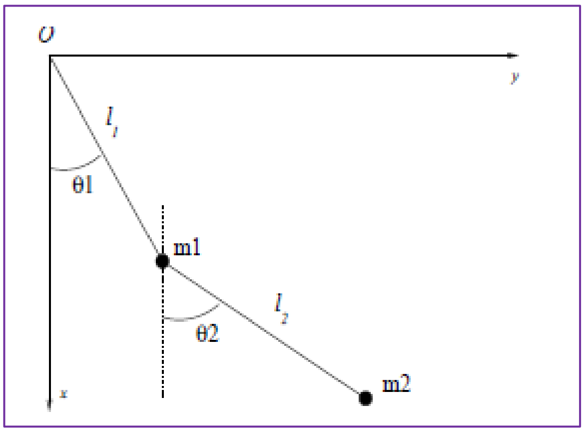
Sachant que $\partial T/\partial r = mr\Omega^2$ et $\partial T/\partial\dot{r} = m\dot{r}$, nous obtenons ainsi :

$$m\ddot{r} + mr\left(\frac{k}{m} - \Omega^2\right) = mgcos\theta + kl_0$$

$$\ddot{r} + r\left(\frac{k}{m} - \Omega^2\right) = gcos\theta + \frac{k}{m}l_0$$

Exercice N° 4

On utilise le formalisme de Lagrange pour étudier le système suivant : une masse ponctuelle $\mathbf{m_1}$ est reliée par un fil supposé sans masse de longueur $\mathbf{l_1}$ à un point fixe **O**.



Une seconde masse $\mathbf{m_2}$ est reliée par un fil sans masse de longueur $\mathbf{l_2}$ à $\mathbf{m_1}$. Les deux masses ne peuvent pas se mouvoir que dans le plan vertical.

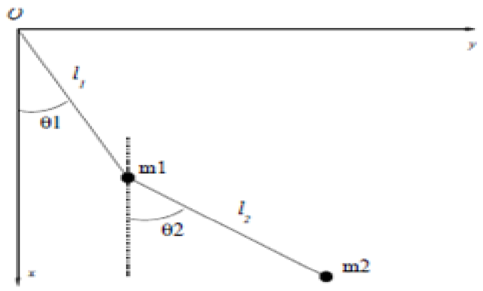
1- Définir les liaisons, le nombre de degrés de liberté et les coordonnées généralisées.

2- Calculer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle. En déduire l'expression du Lagrangien.

3- Trouver les équations du mouvement.

Correction de l'exercice N° 4

On utilise le formalisme de Lagrange pour étudier le système suivant : une masse ponctuelle m_1 est reliée par un fil supposé sans masse de longueur l_1 à un point fixe O. Une seconde masse m_2 est reliée par un fil sans masse de longueur l_2 à m_1. Les deux masses ne peuvent pas se mouvoir que dans le plan vertical.



1. Le fil inextensible reliant la masse m_1 à O développe une tension sur m_1 qui le maintien à une distance constante de O et donc impose la relation $x_1^2 + y_1^2 = l_1^2$, et donc la liaison est une liaison holonome, (x_1, y_1) étant les cordonnées de m_1 dans le plan (Oxy). De même le fil inextensible liant m_1 à m_2 et les maintenant à une distance constante impose $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = l_2^2$ et donc la liaison est holonome également.

Le système que nous étudions est formé de deux points matériels. Aussi, le nombre total de mouvements possibles est $3 \times 2 = 6$. Comme les deux points matériels doivent rester sur le plan (Oxy), alors $z_1 = z_2 = 0$. De même, les deux liaisons holonomes imposent deux degrés de liaisons ce qui laissent finalement comme degrés de liberté $6 - 4 = 2$. Aussi, le choix le mieux adapté pour les coordonnées indépendantes est celui des angles (θ_1, θ_2) qui repèrent respectivement les mouvements de m_1 et de m_2 par rapport à la verticale et que nous prenons comme coordonnées généralisées.

2. Calculons les vecteurs vitesses de m_1 et de m_2. Soit $R(O, xyz)$ un repère que nous considérons galiléen. Nous avons

$$\vec{V}(m_1/R) = l_1\dot{\theta}_1\overrightarrow{u_1} \quad \text{et} \quad \vec{V}(m_2/R) = l_1\dot{\theta}_1\overrightarrow{u_1} + l_2\dot{\theta}_2\overrightarrow{u_2}$$

Où $\overrightarrow{u_1}$est le vecteur unitaire de $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$celui de $\overrightarrow{M_1M_2}$. Ainsi l'énergie cinétique du système est la somme des énergies cinétiques de chacun des points matériels, ce qui donne

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}[m_1V^2(m_1/\mathcal{R}) + m_2V^2(m_2/\mathcal{R})]$$
$$= \frac{1}{2}\left[m_1{l_1}^2{\dot{\theta}_1}^2 + m_2({l_1}^2{\dot{\theta}_1}^2 + {l_2}^2{\dot{\theta}_2}^2 + 2l_1\dot{\theta}_1l_2\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[(m_1 + m_2){l_1}^2{\dot{\theta}_1}^2 + m_2({l_2}^2{\dot{\theta}_2}^2 + 2l_1\dot{\theta}_1l_2\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\right]$$

Le bilan des forces appliquées au système sont :

$m_1\vec{g}$: Poids de m_1 ;

$m_2\vec{g}$: Poids de m$_2$;
$\overrightarrow{T_1} = -T_1\overrightarrow{u_1}$: Tension du fil l$_1$ sur m$_1$;
$\overrightarrow{T_2} = T_2\overrightarrow{u_2}$: Tension du fil l$_2$ sur m$_1$;
$\overrightarrow{T_3} = -T_2\overrightarrow{u_2}$: Tension du fil l$_2$ sur m$_2$;

Considérons un déplacement virtuel élémentaire de m$_1$ qui est $\delta\overrightarrow{M_1} = l_1\delta\theta_1\overrightarrow{v_1}$ et celui de m$_2$ est $\delta\overrightarrow{M_2} = l_1\delta\theta_1\overrightarrow{v_1} + l_2\delta\theta_2\overrightarrow{v_2}$, où $\overrightarrow{v_i}$ sont les vecteurs unitaires perpendiculaires dans le sens direct aux vecteurs $\overrightarrow{u_i}$. Le travail virtuel élémentaire est donné par :

$$\begin{aligned}\delta W &= \left(m_1\vec{g} + \overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2}\right).\delta\overrightarrow{M_1} + \left(m_2\vec{g} + \overrightarrow{T_3}\right).\delta\overrightarrow{M_2} \\ &= -m_1l_1gsin\theta_1\,\delta\theta_1 - m_2g(l_1sin\theta_1\,\delta\theta_1 + l_2sin\theta_2\,\delta\theta_2) \\ &= -gsin\theta_1(m_1l_1 + m_2l_2)\,\delta\theta_1 - m_2g\,l_2sin\theta_2\,\delta\theta_2)\end{aligned}$$

Ce qui donne pour les composantes généralisées de la résultante des forces :

$$Q_{\theta_1} = \frac{\partial V}{\partial\theta_1} = -gsin\theta_1(m_1l_1 + m_2l_2)$$

$$Q_{\theta_2} = \frac{\partial V}{\partial\theta_1} = -m_2g\,l_2sin\theta_2$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial\theta_1} = -gsin\theta_1(m_1l_1 + m_2l_2) \Rightarrow V = -gcos\theta_1(m_1l_1 + m_2l_2) + C_1(\theta_2) \\ \dfrac{\partial V}{\partial\theta_2} = C_1'(\theta_2) = -m_2g\,l_2sin\theta_2 \Rightarrow C_1(\theta_2) = -m_2g\,l_2cos\theta_2 + C_2\end{cases}$$

Ce qui donne pour le potentiel :

$$V(\theta_1,\theta_2) = -gcos\theta_1(m_1l_1 + m_2l_2) - m_2g\,l_2cos\theta_2 + C_2$$

On peut remarquer que **V = V$_1$ + V$_2$**

Le lagrangien est ainsi donné par :

$$\begin{aligned}L = \frac{1}{2}&\left[(m_1 + m_2){l_1}^2{\dot{\theta}_1}^2 + m_2({l_2}^2{\dot{\theta}_2}^2 + 2l_1\dot{\theta}_1l_2\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\right] \\ &- gcos\theta_1(m_1l_1 + m_2l_2) - m_2g\,l_2cos\theta_2 + C_2\end{aligned}$$

3. Nous avons

$$\frac{\partial L}{\partial\theta_1} = -m_2l_1\dot{\theta}_1l_2\dot{\theta}_2\sin(\theta_1 - \theta_2) - gsin\theta_1(m_1l_1 + m_2l_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta_2} = m_2l_1\dot{\theta}_1l_2\dot{\theta}_2\sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2l_2gsin\theta_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2){l_1}^2\dot{\theta}_1 + m_2l_1\dot{\theta}_2l_2\cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_2} = (m_1 + m_2){l_2}^2\dot{\theta}_2 + m_2l_1\dot{\theta}_1l_2\cos(\theta_1 - \theta_2)$$

L'équation de Lagrange selon θ$_1$, s'écrit comme suit :

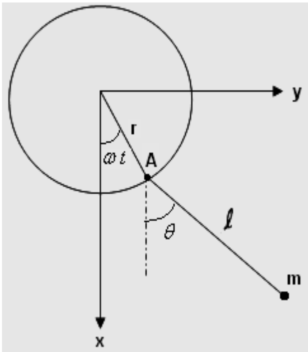
$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}$$
$$= -m_2 l_1 \dot{\theta}_1 l_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - g sin\theta_1 (m_1 l_1 + m_2 l_2) + (m_1 + m_2) {l_1}^2 \ddot{\theta}_1$$
$$+ m_2 l_1 l_2 (\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2))$$
$$= -g sin\theta_1 (m_1 l_1 + m_2 l_2) + (m_1 + m_2) {l_1}^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$
$$= 0$$

et celle selon θ_2

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}$$
$$= m_2 l_1 \dot{\theta}_1 l_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - g sin\theta_2 m_2 l_2 + m_2 {l_2}^2 \ddot{\theta}_2$$
$$+ m_2 l_1 l_2 (\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2))$$
$$= -g sin\theta_2 m_2 l_2 + m_2 {l_2}^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) = 0$$

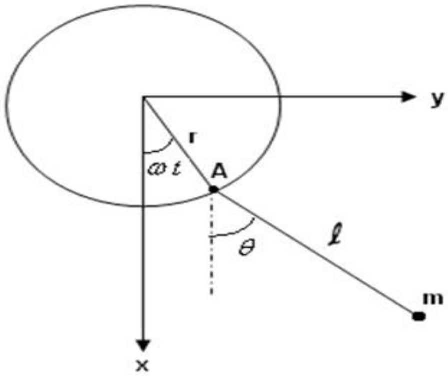
Exercice N° 5

Dans un plan vertical oxy, on considère un pendule simple **(l, m)** dont le point de suspension A se déplace à vitesse angulaire constante **ω**, sur un cercle de rayon **r** (voir figure).
Calculer le lagrangien du système et en déduire l'équation du mouvement.



Correction de l'exercice N°5

La masse m à pour coordonnées :



$$\begin{cases} x = r cos\,\omega t + l\,cos\theta \\ y = r sin\,\omega t + l\,sin\theta \end{cases}$$

Sa vitesse est égale à :

$$\begin{cases} \dot{x} = -r\omega sin\,\omega t + l\,\dot{\theta} sin\theta \\ \dot{y} = r\omega cos\,\omega t + l\dot{\theta}\,cos\theta \end{cases}$$

Son énergie cinétique est égale à :

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}(\omega^2 r^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 2 l \omega r \dot{\theta}\,(cos\omega t cos\theta + sin\omega t sin\theta)$$

$$T = \frac{m}{2}(\omega^2 r^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 2 l \omega r \dot{\theta} \cos(\omega t - \theta)$$

Son énergie potentielle est :

$$U = -mgx = -mg(r cos\,\omega t + l\,cos\theta)$$

On en déduit le Lagrangien :

$$L = T - U = \frac{m}{2}(\omega^2 r^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 2 l \omega r \dot{\theta} \cos(\omega t - \theta) + mg(r cos\,\omega t + l\,cos\theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m(l^2 \dot{\theta} + l \omega r \cos(\omega t - \theta)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = m(l^2\ddot\theta - l\omega r(\omega - \dot\theta)\sin(\omega t - \theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{m}{2}(2l\omega r\dot\theta \sin(\omega t - \theta)) - mgl\, sin\theta = ml\omega r\dot\theta \sin(\omega t - \theta) - mgl\, sin\theta$$

L'équation du mouvement donnée par Lagrange est :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = m(l^2\ddot\theta - l\omega r\big(\omega - \dot\theta\big)\sin(\omega t - \theta) - ml\omega r\dot\theta \sin(\omega t - \theta) + mgl\, sin\theta = 0$$

Soit : $l^2\ddot\theta - l\omega^2 r\sin(\omega t - \theta) + gl\, sin\theta = 0$

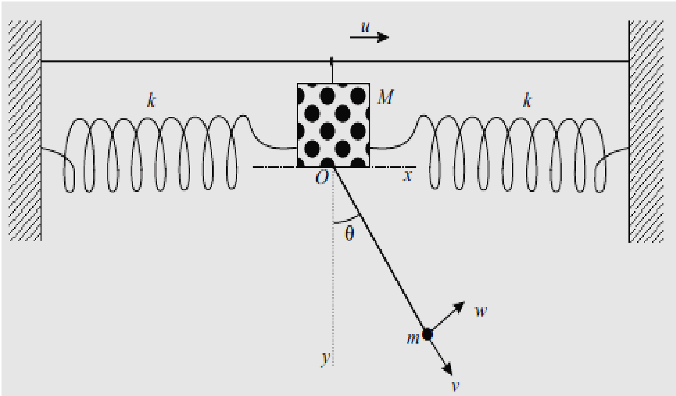
Exercice N° 6

Soit un système mécanique bidimensionnel décrit par le schéma ci-dessous

1- Combien de degrés de liberté possède ce système ?

2- Ecrire son lagrangien ;

3- Ecrire les équations du mouvement.



Correction de l'exercice N°6

1- Système à 2 degrés de liberté : par exemple l'angle d'inclinaison du pendule θ, et la position de la masse M sur l'axe horizontal x.

2- Il n'y a que des forces conservatives : les forces de rappel des ressorts dérivent d'un potentiel ainsi que le poids.

Le lagrangien est donc : $L = T - U$

Où T est l'énergie cinétique totale et U l'énergie potentielle totale.

On choisit un référentiel galiléen avec un des axes selon l'axe de glissement de M (**ie** Ox)

Les masses M et m sont supposées ponctuelles. On a :

$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{u}$ et $\overrightarrow{Om} = x\,\vec{u} + l\,\vec{v}$ ($\vec{u}$ unitaire le long de Ox et fixe, $\vec{v}$ unitaire le long de la tige supportant m et donc mobile)

On a donc

$$\frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot x\,\vec{u} \quad \text{et} \quad \frac{d\,\overrightarrow{Om}}{dt} = \dot x\,\vec{u} + l\,\frac{d\vec{v}}{dt} = \dot x\,\vec{u} + l\,\dot\theta\vec{\omega}$$

Puis

$$T = \frac{1}{2}M\dot x^2 + \frac{1}{2}m(\dot x^2 + l^2\dot\theta^2 + 2\dot x l\dot\theta\cos(\vec{u},\vec{\omega}))$$
$$= \frac{1}{2}M\dot x^2 + \frac{1}{2}m(\dot x^2 + l^2\dot\theta^2 + 2\dot x l\dot\theta\cos\theta)$$

Pour l'énergie potentielle il y a les 2 ressorts et le poids

$$U = mgl(1 - cos\theta) + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k(-x)^2 = mgl - mglcos\theta + kx^2$$

et donc

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta\right) - mgl + mglcos\theta - kx^2$$

3- Les équations du mouvement.

Première équation du mouvement

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

Calcul de 3 lignes sans intérêt...

Deuxième équation du mouvement

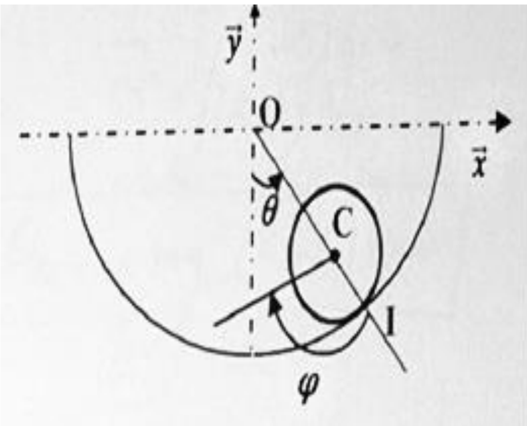
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

Calcul de 3 lignes sans intérêt...

Cet exercice est important car il montre à des gens qui sortent de prépa comment on peut obtenir très facilement les équations du mouvement pour un problème tordu qui pourrait les terroriser autrement (ils ne connaissent que Newton ...). Il montre aussi que la difficulté réside dans le fait de résoudre les équations du mouvement (ce qui est généralement impossible) et pas dans le fait de les écrire...

Exercice N° 7

Un disque, pesant, homogène, de masse m et de rayon r, roule sans glisser à l'intérieur d'une circonférence de rayon R > r, situé dans un plan vertical.



1- Calculer l'énergie cinétique du système.

2- Calculer la force généralisée Q_θ (ou l'énergie potentielle U).

3- Par Lagrange de 2ème espèce, établir l'équation différentielle du système en fonction de θ.

4- En déduire l'équation différentielle dans le cas des petits mouvements et donner la pulsation propre.

Correction de l'exercice N° 7

Soit la base absolue $R_0(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ et la base relative $R_s(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\varphi}, \overrightarrow{e_z})$

1- $T = \frac{1}{2}m\overrightarrow{V(C/R_0)}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega_2}^t J_C \overrightarrow{\Omega_2}$

Dans R_s $\overrightarrow{OC} = \begin{cases} 0 \\ R-r \\ 0 \end{cases}$

$$\overrightarrow{V(C/R_0)} = \left.\frac{d\overrightarrow{OC}}{dt}\right|_{R_s} + \overrightarrow{\Omega_1} \wedge \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\theta} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ R-r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (R-r)\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T = \frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(\dot{\varphi} - \dot{\theta})^2\frac{mr^2}{2}$$

2- $Q_\theta = m\vec{g}.\frac{d\overrightarrow{OC}}{d\theta}\Big|_{R_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ mg \\ 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} (R-r)cos\theta \\ -(R-r)sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Q_\theta = -mg(R-r)sin\theta$

Avec $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} (R-r)sin\theta \\ -(R-r)cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0}$

3- Par Lagrange de 2ème espèce ⇒ équation différentielle en fonction de θ

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial\theta} = Q_\theta$$

Exprimons T en fonction de θ

La condition de roulement sans glissement en I $\Longrightarrow \overrightarrow{V_g(I)} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{V(I \in D)}\Big|_{R_0} = \overrightarrow{V(I \in C)}\Big|_{R_0} \Rightarrow$

$$\overrightarrow{V(I \in D/R_0)} = \frac{d\overrightarrow{OC}}{dt}\Big|_{R_s} + \overrightarrow{\Omega_2} \wedge \overrightarrow{CI} = \begin{pmatrix} 0 \\ (R-r)\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi}-\dot{\theta} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (R-r)\dot{\theta} - r(\dot{\varphi}-\dot{\theta}) = 0 \Rightarrow R\dot{\theta} - r\dot{\varphi} = 0 \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{R}{r}\dot{\theta}$$

$$T = \frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(\frac{R}{r} - 1)^2\dot{\theta}^2\frac{mr^2}{2} = \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}^2$$

$\frac{\partial T}{\partial\theta} = 0 \qquad \frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}} = \frac{3}{2}m(R-r)^2\dot{\theta}$

$\frac{3}{2}m(R-r)^2\ddot{\theta} + mg(R-r)sin\theta = 0$ Equation différentielle

- Si θ petit $sin\,\theta \approx \theta$

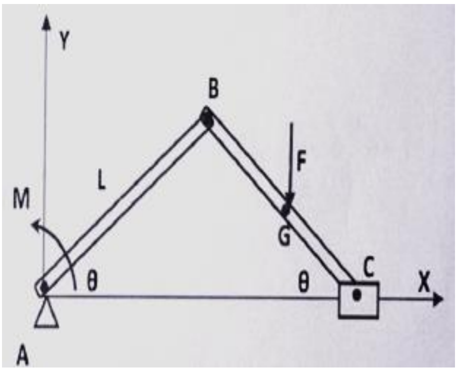
$$\frac{3}{2}(R-r)\ddot{\theta} + g\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$$

Avec $\omega^2 = \frac{g}{\frac{3}{2}(R-r)}$

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{g}{R-r}}$$ La pulsation propre

Exercice N° 8

Soit le système formé par deux barres identiques AB et BC de même masse m, de même longueur L et de même moment d'inertie $I_G = m\frac{L^2}{12}$, articulées en A et B. Le coulisseau C de masse m_C glisse le long de l'axe X. Le système est soumis à la force F appliqué au milieu de la barre BC et au moment M.



1- Par le principe des travaux virtuels, calculer le moment M à l'équilibre et déduire la force généralisée Q_θ.

2- Calculer l'énergie cinétique du système en fonction de m, m_C, θ et L.

3- Ecrire l'équation différentielle du mouvement du système en utilisant le 2ème espèce.

Correction de l'exercice N° 8

1- Par le principe des travaux virtuels

On calcule le moment M à l'équilibre

$$\delta W = 0 \;\Longrightarrow\; M\delta\theta + m\vec{g}.\delta\overrightarrow{AG_1} + m\vec{g}.\delta\overrightarrow{AG_2} + \vec{F}.\delta\overrightarrow{AG_2} + m_C\vec{g}.\delta\overrightarrow{AC} = 0$$

$$M\delta\theta - mg.\delta y_{G_1} - (mg+F)\delta y_{G_2} + m_C g\delta y_C = 0$$

$$\begin{cases} y_{G_1} = y_{G_2} = \frac{L}{2}sin\theta \;\Rightarrow\; \delta y_{G_1} = \delta y_{G_2} = \frac{L}{2}cos\theta\delta\theta \\ y_C = 0 \end{cases}$$

$$\delta W = 0 \;\Longrightarrow [M - mgLcos\theta - F\frac{L}{2}cos\theta]\delta\theta = 0$$

$$\Longrightarrow M = Lcos\theta(mg + \frac{F}{2})$$

Par conséquent la force généralisée Q_θ.

$$\delta W = \left[M - \; Lcos\theta\left(mg + \frac{F}{2}\right)\right]\delta\theta \;\Rightarrow\; Q_\theta = M - \; Lcos\theta\left(mg + \frac{F}{2}\right)$$

2- On calcule l'énergie cinétique du système en fonction de m, m_C, θ et L.

$$T = \frac{1}{2}m\overrightarrow{V(G_1/R_s)}^2 + \frac{1}{2}J_{G_1}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\overrightarrow{V(G_2/R_s)}^2 + \frac{1}{2}J_{G_2}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_C\overrightarrow{V(C/R_s)}^2$$

$$\overrightarrow{V(G_1/R_s)} = \begin{cases} -\frac{L}{2}\dot{\theta}sin\theta \\ \frac{L}{2}\dot{\theta}cos\theta \\ 0 \end{cases} \quad \overrightarrow{V(G_2/R_s)} = \begin{cases} -\frac{3L}{2}\dot{\theta}sin\theta \\ \frac{L}{2}\dot{\theta}cos\theta \\ 0 \end{cases} \quad \text{et } \overrightarrow{V(C/R_s)} = \begin{cases} -2L\dot{\theta}sin\theta \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2}m\frac{L^2}{4}\dot{\theta}^2 + m\frac{L^2}{4}(9sin^2\theta + cos^2\theta)\,\dot{\theta}^2 + \frac{mL^2}{12}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_C(4L^2\dot{\theta}^2 sin^2\theta)$$

$$T = \frac{1}{2}L^2\dot{\theta}^2[\frac{2}{3}m + 2(m + 2m_C)sin^2\theta]$$

3- L'équation différentielle du mouvement du système en utilisant de 2ème espèce.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial\theta} = Q_\theta$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}} = L^2\ddot{\theta}\left[\frac{m}{3} + (m + 2m_C)sin^2\theta\right] + L^2\dot{\theta}^2(m + 2m_C)sin2\theta$$

$$\frac{\partial T}{\partial\theta} = 2L^2\dot{\theta}^2(m + 2m_C)sin\theta cos\theta$$

L'équation différentielle en θ est :

$$L^2\ddot{\theta}\left[\frac{m}{3} + (m + 2m_C)sin^2\theta\right] + L^2\dot{\theta}^2(m + 2m_C)sin2\theta - 2L^2\dot{\theta}^2(m + 2m_C)sin\theta cos\theta$$
$$= M - \; Lcos\theta\left(mg + \frac{F}{2}\right)$$