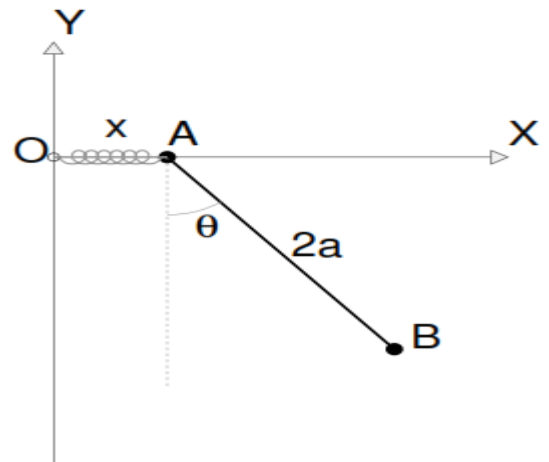


SMP 5 – Module 28Travaux dirigés de mécanique analytiqueSérie N° 3 : Formalisme de Hamilton**Exercice N° 1**

On considère une barre **AB** homogène de longueur $2a$ et de masse m dont l'extrémité **A** est attachée à un ressort de constante de raideur k . L'extrémité **A** est assujettie à se déplacer sans frottement sur l'axe **Ox** d'un repère **R(Oxyz)** supposé galiléen. On repère la position de **A** le long de **Ox** par **OA = x**. La barre **AB** reste dans le plan vertical **Oxy** et fait un angle θ avec la verticale passant par **A**, voir figure ci-dessous. On négligera la longueur à vide du ressort.



1- Montrer que la barre admet deux degrés de liberté.

On utilise les coordonnées généralisées x et θ .

2- Etablir les expressions de l'énergie cinétique **T** et de l'énergie potentielle **V** de la barre **AB**. En déduire le lagrangien **L** et les équations du mouvement.

3- Déterminer les moments conjugués p_x et p_θ relatifs aux coordonnées généralisées x et θ .

4- En déduire le hamiltonien **H** et retrouver les équations du mouvement.

Exercice N° 2

On considère un électron de masse m et de charge $-e$ soumis à l'attraction électrostatique d'un noyau $+Ze$. On considère que le référentiel lié au noyau est galiléen. On utilisera les coordonnées sphériques comme coordonnées généralisées.

1- Ecrire le potentiel $V(\vec{r})$ en coordonnées sphériques (r, θ, φ) . On posera $k = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}$

2- Ecrire le lagrangien du système $L(r, \theta, \varphi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, t)$.

3- Donner l'expression du Hamiltonien $H(r, \theta, \varphi, p_r, p_\theta, p_\varphi, t)$. Que représente-t-il ? Est-il conservé ? Justifier.

4- Trouver une autre constante du mouvement. Quelle est son interprétation ? Cette constante peut être choisie égale à zéro. Pourquoi ?

Montrer que ce choix est équivalent à prendre $\varphi(t) = \text{constante} \forall t$. Avec ce choix, donner l'expression du nouveau Hamiltonien.

5- Ecrire les équations de Hamilton et identifier une nouvelle constante du mouvement.

6- Montrer qu'un mouvement circulaire est possible. Donner le rayon r_c du cercle en fonction des données initiales r_0 et $\dot{\theta}_0$. En déduire l'expression de la vitesse angulaire à communiquer à l'électron pour que r_c soit égal à r_0 .