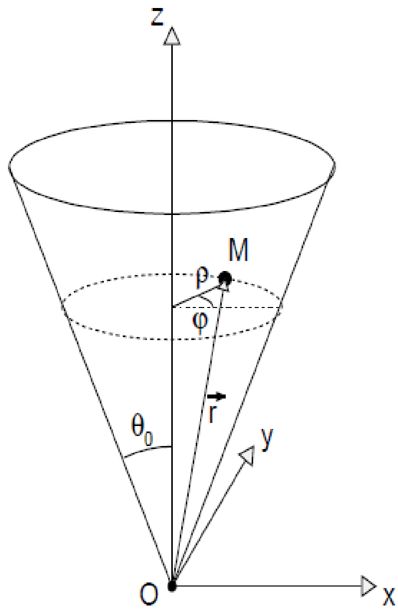
SMP 5 – Module 28

Travaux dirigés de mécanique analytique

Série N° 2 : Multiplicateurs de Lagrange

Exercice N° 1 : Multiplicateurs de Lagrange

Considérons un point matériel **M** de masse m qui se déplace sur la face intérieure d'un cône d'ouverture $2\theta_0$. La position de **M** est repérée par ces coordonnées cylindriques $(\rho,\ \varphi, z)$; voir figure ci-contre.



1- Dénombrer les forces appliquées à M et donner la contrainte de la liaison sous la forme $\mathbf{f(\rho,\ \varphi, z)\ =\ \rho\ -\ z\tan\theta_0\ =\ 0}$.

2- Ecrire le lagrangien $\mathcal{L}_0(\rho,\ \varphi, z, \dot\rho,\ \dot\varphi, \dot z, t)$ de **M** sans tenir compte de la contrainte.

3- Considérer le nouveau lagrangien $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \lambda\, f(\rho,\ \varphi, z)$, où λ est un multiplicateur de Lagrange.

3- 1- Ecrire les équations de Lagrange.

3- 2- Trouver deux intégrales premières.

3- 3- A l'aide des équations du mouvement, trouver λ en fonction des coordonnées.

3- 4- Etablir l'expression des composantes généralisées de la force de liaison agissant sur **M**.

3- 5- Montrer que la force de liaison est normale à la surface intérieure du cône.

Correction de l'exercice N° 1 : Multiplicateurs de Lagrange

1- Les forces appliquées à M sont son poids $m\vec g$ et la réaction de la surface intérieure du cône $\vec R$. Le fait que M doit rester en contact avec le cône implique que $\boldsymbol{\rho = z\tan\theta_0 \ \Rightarrow\ \rho - z\tan\theta_0 = 0 = f(\rho,\ \varphi, z)}$.

Notons que f ne dépend pas de φ.

2- Si l'on ne tient pas compte de la contrainte f, rappelons que l'on décrit le système par (ρ, φ, z) et qui ne sont pas généralisées.

L'énergie cinétique du système est donnée par

$$T = \frac{1}{2}m(\dot\rho^2 + \ \rho^2\dot\varphi^2 + \ \dot z^2)$$

Quant à l'énergie potentielle, nous avons

$$dV = \ -m\vec g\ d\overrightarrow{M} = mg\vec k\,.\left(d\rho\ \overrightarrow{e_\rho} + \ \rho d\varphi\overrightarrow{e_\varphi} + dz\,\vec k\right) = mgdz\ \ \Rightarrow\ \ V = mgz\ +\ \ K$$

Le lagrangien $\mathcal{L}_0$ de M est donné par

$$\mathcal{L}_0 = \ \boldsymbol{T}\ -\ \boldsymbol{V}\ = \frac{1}{2}m(\dot\rho^2 + \ \rho^2\dot\varphi^2 + \ \dot z^2) - \boldsymbol{mgz}\ +\ \ \boldsymbol{K}$$

On peut prendre K = 0.

3-

3- 1- Considérons le nouveau lagrangien

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \lambda f(\rho,\varphi,z) = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - mgz + \lambda(\rho - z\tan\theta_0)$$

Nous obtenons alors

$$\frac{\partial L}{\partial \rho} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = \lambda + m\rho\dot{\varphi}^2 - m\ddot{\rho} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = -m(2\rho\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho^2\ddot{\varphi}) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \rho} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = -mg - \lambda\tan\theta_0 - m\ddot{z} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} = \rho - z\tan\theta_0 = 0$$

Quatre inconnues et quatre équations.

3- 2- Comme le lagrangien ne dépend pas du temps explicitement, l'énergie mécanique est conservée. De même, la variable φ est cyclique, ce qui implique que son moment conjugué est une intégrale première et qui n'est d'autre que le moment cinétique par rapport à Oz :

$$m\rho^2\dot{\varphi} = \sigma_{(Oz)}$$

3- 3- Comme $\rho - z\tan\theta_0 = 0 \Rightarrow \ddot{\rho} - \ddot{z}\tan\theta_0 = 0$, ce qui donne en utilisant les résultats précédents

$$m\ddot{\rho} - \frac{\sigma_{(oz)}^2}{m\rho^3} = \lambda$$

$$m\ddot{z} = mg + \lambda\tan\theta_0 = \frac{m\ddot{\rho}}{\tan\theta_0}$$

et en substituant $m\ddot{\rho}$ de la première équation, nous obtenons

$$-mg\tan\theta_0 - \lambda\tan^2\theta_0 - \frac{\sigma_{(oz)}^2}{m\rho^3} = \lambda \Rightarrow \lambda = \frac{-mg\tan\theta_0 - \frac{\sigma_{(oz)}^2}{m\rho^3}}{1 + \tan^2\theta_0}$$

$$= -\frac{1}{2}mg\sin 2\theta_0 - \cos^2\theta_0\frac{\sigma_{(oz)}^2}{m\rho^3}$$

3- 4- Les composantes généralisées de la force de liaison sont données par

$$Q_\rho = \lambda\frac{\partial f}{\partial \rho} = -\frac{1}{2}mg\sin 2\theta_0 - \cos^2\theta_0\frac{\sigma_{(oz)}^2}{m\rho^3}$$

$$Q_\varphi = \lambda\frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0$$

$$Q_z = \lambda\frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{1}{2}mg\sin 2\theta_0 - \cos^2\theta_0\frac{\sigma_{(oz)}^2}{m\rho^3}\right)\tan\theta_0 = mg\sin^2\theta_0 - \cos\theta_0\frac{\sigma_{(oz)}^2}{m\rho^3}\sin\theta_0$$

3- 5- Notons que $\vec{R} = Q_\rho \overrightarrow{e_\rho} + Q_\varphi \overrightarrow{e_\varphi} + Q_z \vec{k}$ a le module $\|\vec{R}\|^2 = \lambda^2(1 + tg^2\theta_0)$ et donc le vecteur unitaire de la direction de $\vec{R}$ est $\vec{\mathbf{u}} = \frac{\vec{\mathbf{R}}}{\|\vec{\mathbf{R}}\|} = \frac{(\overrightarrow{\mathbf{e_\rho}} - \mathbf{tan\theta_0}\vec{\mathbf{k}})}{\sqrt{\mathbf{1+tg^2\theta_0}}}$. Aussi, pour démontrer que la force de liaison $\vec{R}$ est normale à la face intérieure du cône au point M, il suffit de démontrer que $\vec{\mathbf{u}}\,.\,\overrightarrow{\boldsymbol{dM}} = \mathbf{0}$, puisque $\overrightarrow{\boldsymbol{dM}}$ est tangent au point M au cône :

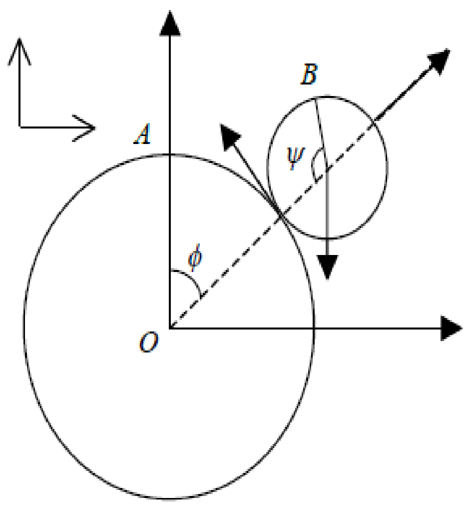
$$\vec{\boldsymbol{u}}.\overrightarrow{\boldsymbol{dM}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1} + \mathbf{tan^2\theta_0}}}(\overrightarrow{e_\rho} - \mathbf{tan\theta_0}\vec{\mathbf{k}}).\left(d\rho\,\overrightarrow{e_\rho} + \rho d\varphi \overrightarrow{e_\varphi} + dz\,\vec{k}\right)$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1} + \mathbf{tan^2\theta_0}}}(d\rho - dz\,\mathbf{tan\theta_0})$$

Comme $\boldsymbol{\rho} - \mathbf{z}\,\mathbf{tan\theta_0} = \mathbf{0} \Rightarrow d\boldsymbol{\rho} - \mathbf{dz} \times \mathbf{tan\theta_0} = \mathbf{0}$, ce qui est le résultat recherché.

Exercice N° 2 : Sphère qui roule ...

Une sphère pleine de rayon **a** et de masse **m** est située initialement au sommet d'une autre sphère de rayon **b**. La première sphère est déplacée de sorte qu'elle roule sans glisser le long de la seconde sphère.



1- Cas où les deux sphères restent en contact

a- Exprimer la condition de non-glissement.

b- Calculer l'énergie cinétique de la sphère de rayon a. On rappelle que le moment d'inertie d'une sphère pleine de rayon R et de masse m par rapport à son centre est $I = \frac{2}{5} m\, R^2$.

c- En déduire le lagrangien.

d- Ecrire les équations du mouvement de la sphère.

2- Condition pour que la 1ere sphère quitte la 2nde

a- Ecrire la condition de liaison supplémentaire permettant la détermination de la tension du fil.

b- Exprimer le lagrangien du système.

c- Déterminer l'angle ϕ au-delà duquel le contact entre les deux sphères est rompu.

Correction de l'exercice N° 2 : Sphère qui roule ...

1- a- Condition de non-glissement : $b\,\frac{d\phi}{dt} = a\,\frac{d\psi}{dt} \Leftrightarrow b\,\dot{\phi} = a\,\dot{\psi} \Leftrightarrow b\,\phi = a\,\psi$ car à t = 0, A et B sont confondus ($\phi(0) = \psi(0)$). C.est une condition holonôme.

b- On utilise le théorème de Koenig : $T = \frac{1}{2}mv^2(G) + \frac{1}{2}J\Omega^2$ où G est le centre de masse du solide, J le moment d'inertie par rapport à G et Ω la vitesse de rotation d'un point qqc du solide par rapport à l'origine du repère. Ici, G = C.

$$T = \frac{1}{2}m(a+b)^2\dot{\phi}^2 + \frac{2}{5}ma^2(\dot{\phi}+\dot{\psi})^2$$

$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{k} \iff V = mgz_c = mg\,(a+b)\,cos\phi$ en prenant comme origine des potentiels le point O.

D'où le lagrangien,

c) $L = T - V = \frac{1}{2}m(a+b)^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{5}ma^2\left(\dot{\phi} + \dot{\psi}\right)^2 - mg(a+b)\,cos\phi$

d – La condition de liaison est : $b\dot{\phi} = a\dot{\psi}$ qui est de la forme $\sum_{\alpha=1}^{d} A_\alpha^{(l)}\,\dot{q}_\alpha + A^{(l)} = 0$

Avec $A_\phi^{(1)} = b$ et $A_\psi^{(1)} = -a$

D'où les équations du mouvement :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial\phi} = A_\phi^{(1)}\lambda_1 \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}} - \frac{\partial L}{\partial\psi} = A_\psi^{(1)}\lambda_1 \\ b\dot{\phi} = a\dot{\psi} \end{cases} \iff \begin{cases} m\,(a+b)^2\,\ddot{\phi} + \frac{2}{5}ma^2\left(\ddot{\phi}+\ddot{\psi}\right) - mg\,(a+b)\sin\phi = b\lambda_1 & (1) \\ \frac{2}{5}ma^2\left(\ddot{\phi}+\ddot{\psi}\right) = -a\lambda_1 & (2) \\ b\dot{\phi} = a\dot{\psi} & (3) \end{cases}$$

De (2) on tire que : $\lambda_1 = -\frac{2}{5}ma\left(\ddot{\phi}+\ddot{\psi}\right)$,

En remplaçant dans (1), on obtient :

$m(a+b)^2\ddot{\phi} + \frac{2}{5}ma^2\left(\ddot{\phi} + \ddot{\psi}\right) - mg(a+b)\,sin\phi = \frac{2}{5}mab\left(\ddot{\phi} + \ddot{\psi}\right)$:

En tenant compte de (3), on obtient une équation différentielle ne faisant intervenir que ϕ :

$$m\,(a+b)^2\,\ddot{\phi} + \frac{2}{5}ma\,(a+b)\,\ddot{\phi} - mg\,(a+b)\sin\phi = -\frac{2}{5}mb\,(a+b)\,\ddot{\phi}$$
$$\iff (a+b)^2\,\ddot{\phi} + \frac{2}{5}\,(a+b)^2\,\ddot{\phi} - g\,(a+b)\sin\phi = 0$$
$$\iff \begin{cases} \ddot{\phi} = \frac{5g}{7(a+b)}\sin\phi \\ \ddot{\psi} = \frac{5bg}{7a(a+b)}\sin\phi \end{cases} \qquad (4)$$

Notons que $\lambda_1 = -\frac{2}{5}ma\left(\ddot{\phi} + \ddot{\psi}\right) = -\frac{2}{7}mg\,sin\phi$ représente l'expression de la force de frottement au point de contact des deux sphères (tangent) et assurant le roulement sans glissement.

2: a- Pour calculer la force de liaison normale au déplacement et correspondant à la réaction de la sphère immobile, il faut reprendre le même raisonnement que précédemment mais en introduisant le multiplicateur de Lagrange traduisant le contact entre les deux sphères : $r = a + b$ comme non-holonôme.

Dans ce cas, on admet que la sphère mobile puisse avoir un mouvement de translation selon la direction $\vec{e_r}$.

Ainsi, $\overrightarrow{OC} = r\overrightarrow{e_r} \Longleftrightarrow v(C) = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$.D'où, $T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{5}ma^2\left(\dot{\phi} + \dot{\psi}\right)^2$

$V = mgr\cos\phi$

d'où $L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{5}ma^2\left(\dot{\phi} + \dot{\psi}\right)^2 - mgr\cos\phi$

Tant que les deux sphères restent en contact, les équations déterminées précédemment restent toujours valables. A celles-ci, s'ajoutent l'équation de liaison, $r = a + b \Leftrightarrow \delta r = 0$ et celle de l'équation de Lagrange selon r. La nouvelle liaison amène à introduire un second multiplicateur de Lagrange λ_2 avec ${A_r}^{(2)} = 1$. Soit,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = A_r^{(2)}\lambda_2 \\ r = a + b \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 + mg\cos\phi = \lambda_2 \\ r = a + b \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow -m(a+b)\dot{\phi}^2 + mg\cos\phi = \lambda_2$$

Or, λ_2 correspond à la réaction de la sphère. Le contact entre les deux sphères est rompu quand $\lambda_2 = 0$. Soit,

$$-m(a+b)\,\dot{\phi}^2 + mg\,cos\phi = 0 \qquad (5)$$

Or, on a déjà montré que (4) : $\ddot{\phi} = \frac{5g}{7(a+b)}sin\phi \quad \Leftrightarrow \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 = -\frac{5g}{7(a+b)}cos\phi + K$

à $t = 0$, $\begin{cases} \phi = 0 \\ \dot{\phi} = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow K = \frac{5g}{7(a+b)} \Longleftrightarrow \dot{\phi}^2 = -\frac{10g}{7(a+b)}(\cos\phi - 1)$

D'où (5) devient,

$$m(a+b)\frac{10g}{7(a+b)}(\cos\phi - 1) + mg\cos\phi = 0$$
$$\Longleftrightarrow \frac{10}{7}(\cos\phi - 1) + \cos\phi = 0$$
$$\Longleftrightarrow \frac{10}{7}\cos\phi + \cos\phi = \frac{10}{7}$$
$$\Longleftrightarrow \cos\phi = \frac{10}{17}$$

$$\phi = \mathrm{ar}\cos\frac{10}{17}$$