

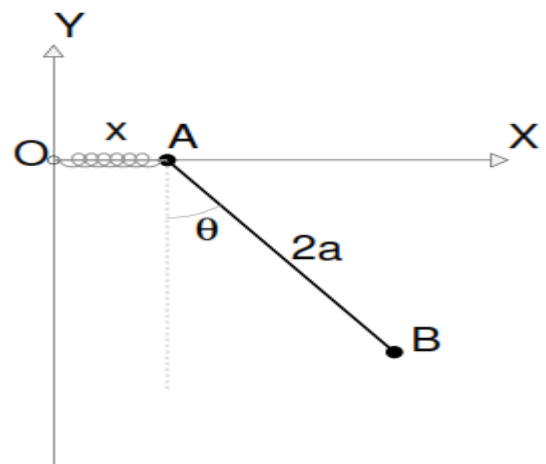
*SMP 5 – Module 28*

*Travaux dirigés de mécanique analytique*

*Correction de la série N° 3 : Formalisme de Hamilton*

**Exercice N° 1**

On considère une barre **AB** homogène de longueur **2a** et de masse **m** dont l'extrémité **A** est attachée à un ressort de constante de raideur **k**. L'extrémité **A** est assujettie à se déplacer sans frottement sur l'axe **Ox** d'un repère **R(Oxyz)** supposé galiléen. On repère la position de **A** le long de **Ox** par **OA = x**. La barre **AB** reste dans le plan vertical **Oxy** et fait un angle **θ** avec la verticale passant par **A**, voir figure ci-dessous. On négligera la longueur à vide du ressort.



1- Montrer que la barre admet deux degrés de liberté.

On utilise les coordonnées généralisées **x** et **θ**.

2- Etablir les expressions de l'énergie cinétique **T** et de l'énergie potentielle **V** de la barre **AB**. En déduire le lagrangien **L** et les équations du mouvement.

3- Déterminer les moments conjugués **p<sub>x</sub>** et **p<sub>θ</sub>** relatifs aux coordonnées généralisées **x** et **θ**.

4- En déduire le hamiltonien **H** et retrouver les équations du mouvement.

**Correction de l'exercice N° 1**

1- Le mouvement de la barre est repéré par les trois coordonnées du centre de gravité de la barre situé à son milieu et trois rotations. Comme le mouvement de la barre a lieu dans le plan vertical ce qui réduit les rotations à une seule repérée par **θ**. Quant au centre de gravité, que l'on note par **G**, sa position est repérée par

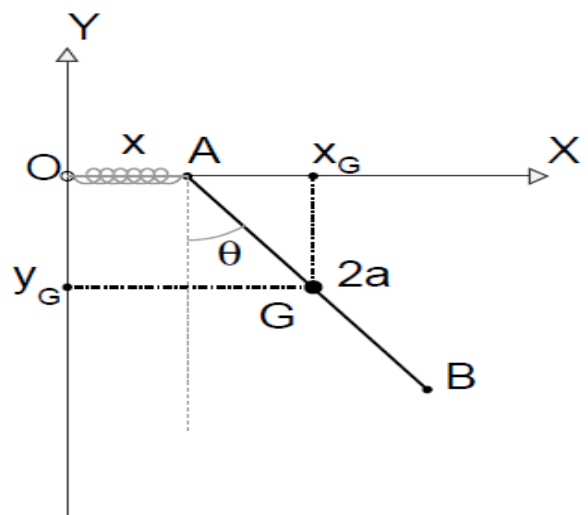
$$\vec{OG} = \begin{cases} x_G = x + a \sin \theta \\ y_G = -a \cos \theta \end{cases}$$

Où **x<sub>G</sub>** et **y<sub>G</sub>** sont les coordonnées de **G**. Aussi,

on voit que la position de **G** peut être repérée par **x** et **θ** et donc le mouvement de la barre est complètement repéré par **x** et **θ**, ce qui montre bien que le nombre de degrés de liberté est égal à 2.

2- En appliquant le théorème de Koenig, l'énergie cinétique de la barre est

$$T = \frac{1}{2} m V_G^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$



où  $V_G$  est la vitesse du centre de masse et  $I = m \frac{a^2}{3}$  est le moment d'inertie par rapport à Gz. Calculons  $V_G$  :

$$\vec{V}_G = \begin{cases} \dot{x}_G = \dot{x} + a\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y}_G = a\dot{\theta}\sin\theta \end{cases} \Rightarrow V_G^2 = \dot{x}^2 + a^2\dot{\theta}^2 + 2a\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta$$

ce qui donne pour l'énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + a^2\dot{\theta}^2 + 2a\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta) + \frac{1}{6}ma^2\dot{\theta}^2$$

Le bilan des forces est la force de rappel du ressort,  $\vec{F} = -k\vec{x}$ , le poids  $\vec{P} = m\vec{g}$  et la réaction normale de l'axe  $\vec{R}_N$  qui ne travaille pas puisqu'elle est perpendiculaire aux déplacements de A. Aussi l'énergie potentielle associée au poids et à la force de rappel est

$$dV = -\vec{F} \cdot d\vec{A} - m\vec{g} \cdot d\vec{G} = kx dx + mg a \sin\theta d\theta \Rightarrow V = \frac{1}{2}kx^2 + mg a \cos\theta + V_0$$

$V_0$  est déterminée à partir des conditions initiales. On peut prendre  $V_0 = 0$  sans que cela n'influe sur les équations du mouvement ou prendre

$$V(\mathbf{x} = \mathbf{0}, \theta = 0) = 0 = -mga + V_0 \Rightarrow V_0 = mga$$

$$\Rightarrow V(\mathbf{x}, \theta) = \frac{1}{2}kx^2 + mga(1 - \cos\theta).$$

Le lagrangien est ainsi donné par

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + a^2\dot{\theta}^2 + 2a\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta) + \frac{1}{6}ma^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}kx^2 - mga(1 - \cos\theta)$$

A partir de l'expression de L, nous avons

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + ma\dot{\theta}\cos\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -ma\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta - mga\sin\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ma^2\dot{\theta} + ma\dot{x}\cos\theta + \frac{1}{3}ma^2\dot{\theta} = \frac{4}{3}ma^2\dot{\theta} + ma\dot{x}\cos\theta$$

Les équations de Lagrange sont comme suit

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = -kx - m\ddot{x} - ma\ddot{\theta}\cos\theta + ma\dot{\theta}^2\sin\theta = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= -ma\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta - mga\sin\theta + \frac{4}{3}ma^2\ddot{\theta} - ma(\ddot{x}\cos\theta - \dot{x}\dot{\theta}\sin\theta) = \\ &= -\frac{4}{3}ma^2\ddot{\theta} - mga\sin\theta - ma\ddot{x}\cos\theta = 0 \end{aligned}$$

ce qui donne pour les équations de mouvement

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = a(\ddot{\theta}\cos\theta + \dot{\theta}^2\sin\theta)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{3}{4a}(g\sin\theta + \dot{x}\cos\theta) = 0$$

3- Etablissons les expressions des moments conjugués

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + ma\dot{\theta}\cos\theta$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{4}{3}ma^2\dot{\theta} + ma\dot{x}\cos\theta$$

4- Le Hamiltonien est ainsi donné par

$$H = p_x \cdot \dot{x} + p_\theta \cdot \dot{\theta} - L$$

$$= m\dot{x}^2 + ma\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{4}{3}ma^2\dot{\theta}^2 + ma\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta$$

$$- \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + a^2\dot{\theta}^2 + 2a\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta) - \frac{1}{6}ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}kx^2 + mga(1 - \cos\theta)$$

$$= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + a^2\dot{\theta}^2 + 2a\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta) + \frac{1}{6}ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}kx^2 + mga(1 - \cos\theta)$$

$$= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + a^2\dot{\theta}^2 + 2a\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta) - \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + \frac{2}{3}ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$+ mga(1 - \cos\theta)$$

$$= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2\left(\frac{4}{3} - \cos^2\theta\right) + \frac{1}{2}kx^2 + mga(1 - \cos\theta)$$

Remarquer que dans le cas où l'on ne peut pas exprimer directement H seulement en fonction des coordonnées généralisées et des moments conjugués, on part du système d'équations définissant les moments conjugués et on en tire les expressions  $\dot{x} = f(x, \theta, p_x, p_\theta)$  et  $\dot{\theta} = g(x, \theta, p_x, p_\theta)$  et on les substitue dans l'expression de H. Dans ce cas, il reste à exprimer  $\dot{\theta}$  en fonction des moments conjugués et de la substituer dans H. En utilisant le système d'équations exprimant les moments conjugués, on en tire

$$\begin{cases} p_x = m\dot{x} + ma\dot{\theta}\cos\theta \\ p_\theta = \frac{4}{3}ma^2\dot{\theta} + ma\dot{x}\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\cos\theta p_x = ma\cos\theta\dot{x} + ma^2\dot{\theta}\cos^2\theta \\ p_\theta = \frac{4}{3}ma^2\dot{\theta} + ma\dot{x}\cos\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow p_\theta - a\cos\theta p_x = ma^2\dot{\theta}\left(\frac{4}{3} - \cos^2\theta\right)$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta - a\cos\theta p_x}{ma^2\left(\frac{4}{3} - \cos^2\theta\right)}$$

ce qui donne pour le Hamiltonien exprimé en fonction des coordonnées généralisées et les moments conjugués

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2ma^2} (p_\theta - a \cos \theta p_x)^2 \frac{1}{\left(\frac{4}{3} - \cos^2 \theta\right)} + \frac{1}{2} kx^2 + mga(1 - \cos \theta)$$

Les équations canoniques donnent

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} + \frac{-\cos \theta}{ma} \cdot \frac{p_\theta - a \cos \theta p_x}{\frac{4}{3} - \cos^2 \theta} = \frac{p_x}{m} - a \dot{\theta} \cos \theta$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx \Rightarrow m(\ddot{x} + a\ddot{\theta} \cos \theta - a\dot{\theta}^2 \sin \theta) = -kx$$

et qui n'est d'autre que la première équation établie auparavant.

Pour le système des équations canoniques en  $\theta$  et  $\mathbf{p}_\theta$ , il faut les faire chez vous.

### Exercice N° 2

On considère un électron de masse  $m$  et de charge  $-e$  soumis à l'attraction électrostatique d'un noyau  $+Ze$ . On considère que le référentiel lié au noyau est galiléen. On utilisera les coordonnées sphériques comme coordonnées généralisées.

- 1- Ecrire le potentiel  $V(\vec{r})$  en coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$ . On posera  $k = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}$
- 2- Ecrire le lagrangien du système  $L(r, \theta, \varphi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, t)$ .
- 3- Donner l'expression du Hamiltonien  $H(r, \theta, \varphi, p_r, p_\theta, p_\varphi, t)$ . Que représente-t-il ? Est-il conservé ? Justifier.
- 4- Trouver une autre constante du mouvement. Quelle est son interprétation ? Cette constante peut être choisie égale à zéro. Pourquoi ?  
Montrer que ce choix est équivalent à prendre  $\varphi(t) = \text{constante} \forall t$ . Avec ce choix, donner l'expression du nouveau Hamiltonien.
- 5- Ecrire les équations de Hamilton et identifier une nouvelle constante du mouvement.
- 6- Montrer qu'un mouvement circulaire est possible. Donner le rayon  $r_c$  du cercle en fonction des données initiales  $\mathbf{r}_0$  et  $\dot{\boldsymbol{\theta}}_0$ . En déduire l'expression de la vitesse angulaire à communiquer à l'électron pour que  $r_c$  soit égal à  $r_0$ .

### Correction de l'exercice N° 1

On considère un électron de masse  $m$  et de charge  $-e$  soumis à l'attraction électrostatique d'un noyau  $+Ze$ . On considère que le référentiel lié au noyau est galiléen. On utilisera les coordonnées sphériques comme coordonnées généralisées.

1- Le potentiel  $V(\vec{r})$  est donné par

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-Ze^2}{r} = -\frac{k}{r}$$

2- Notons par  $R(Oxyz)$  le repère lié au noyau. Les vecteurs de la base sphérique  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$  sont en rotation dans  $R$  avec le vecteur rotation  $\vec{\Omega} = \dot{\varphi} \vec{k} + \dot{\theta} \vec{e}_\varphi$  où  $\vec{k}$  est le vecteur unitaire selon  $Oz$ . Si la position de l'électron  $e$  à l'instant  $t$  est  $M$ , alors

$$\begin{aligned}\vec{V}(M) &= \left. \frac{d\vec{OM}}{dt} \right|_R = \left. \frac{dr \vec{e}_r}{dt} \right|_R = \dot{r} \vec{e}_r + r \left. \frac{d\vec{e}_r}{dt} \right|_R = \dot{r} \vec{e}_r + r \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_r \\ &= \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta \\ \Rightarrow V^2 &= \dot{r}^2 + r^2 (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2)\end{aligned}$$

ce qui donne pour l'énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2} m [\dot{r}^2 + r^2 (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2)]$$

Quant à l'énergie potentielle, comme le poids de l'électron est négligé, elle est réduite à l'énergie potentielle  $V(\mathbf{r})$  ce qui donne pour le lagrangien

$$L(r, \theta, \varphi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, t) = \frac{1}{2} m [\dot{r}^2 + r^2 (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2)] + \frac{k}{r}$$

3- Pour établir l'expression du Hamiltonien, calculons d'abord les expressions des moments conjugués :

$$\begin{aligned}p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} \Rightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m} \\ p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m r^2} \\ p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m r^2 \sin^2 \theta}\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}H(r, \theta, \varphi, p_r, p_\theta, p_\varphi, t) &= p_r \cdot \dot{r} + p_\theta \cdot \dot{\theta} + p_\varphi \cdot \dot{\varphi} - L(r, \theta, \varphi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, t) \\ &= m \dot{r}^2 + m r^2 \dot{\theta}^2 + m r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} m [\dot{r}^2 + r^2 (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2)] - \frac{k}{r} \\ &= \frac{1}{2} m [\dot{r}^2 + r^2 (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2)] - \frac{k}{r} \\ &= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2m r^2} + \frac{p_\varphi^2}{2m r^2 \sin^2 \theta} - \frac{k}{r}\end{aligned}$$

$H(\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{p}_r, \mathbf{p}_\theta, \mathbf{p}_\varphi; \mathbf{t})$  représente l'énergie mécanique de l'électron. Comme  $H(\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{p}_r, \mathbf{p}_\theta, \mathbf{p}_\varphi; \mathbf{t})$  ne dépend pas explicitement du temps, il est conservé.

4- Si l'on observe l'expression de  $H(\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{p}_r, \mathbf{p}_\theta, \mathbf{p}_\varphi; \mathbf{t})$ , on remarque que  $\varphi$  est une variable cyclique, ce qui implique que  $\mathbf{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \mathbf{p}_\varphi$  est conservée.  $\mathbf{p}_\varphi$  est la composante du moment cinétique de l'électron selon Oz. En effet, le moment cinétique est donné par

$$\vec{\sigma} = \vec{OM} \wedge m \vec{V} = -m r^2 \dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\theta + m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_\varphi \Rightarrow \vec{\sigma} \cdot \vec{k} = m r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} = p_\varphi$$

On sait que le moment cinétique est constant étant donné que la force coulombienne est centrale. On peut choisir les conditions initiales de manière à ce que le moment cinétique soit perpendiculaire à  $\vec{k}$  et donc  $\mathbf{p}_\varphi \cdot \mathbf{p}_\varphi = 0 \Rightarrow \dot{\varphi} = 0 \Rightarrow \varphi(t) = \text{constante} \forall t$ .

L'expression de  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{p}_r, \mathbf{p}_\theta, \mathbf{p}_\varphi; \mathbf{t})$  devient alors

$$H(r, \theta, \varphi, p_r, p_\theta, p_\varphi, t) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}$$

5- Les équations canoniques de Hamilton sont données par

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{p_\theta^2}{mr^3} + \frac{k}{r^2}$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow p_\theta = Cste = mr^2\dot{\theta} = mr_0^2\dot{\theta}_0$$

et la nouvelle constante est  $p_\theta = mr^2\dot{\theta} = \vec{\sigma} \cdot \vec{\mathbf{e}}_\varphi$  et donc qui n'est d'autre que le moment cinétique selon  $\vec{\mathbf{e}}_\varphi$ .

6- Le mouvement de l'électron peut être circulaire si l'équation  $\dot{r} = 0$  est cohérente avec les équations canoniques de Hamilton. En effet,  $\dot{r} = 0 \Rightarrow p_r = 0$  et donc  $\dot{p}_r = 0$ , ce qui implique

$$-\frac{p_\theta^2}{mr^3} + \frac{k}{r^2} = 0 \Rightarrow r = r_c = \frac{p_\theta^2}{mk} = Cste$$

Ce qui est vérifié puisque  $\mathbf{p}_\theta = m\mathbf{r}_0^2\dot{\boldsymbol{\theta}}_0$  est constant. Donc un mouvement circulaire est possible. La valeur de  $r_c$  en fonction de  $r_0$  est obtenue comme suit

$$r_c = \frac{m\mathbf{r}_0^4\dot{\boldsymbol{\theta}}_0^2}{k}$$

Ainsi la vitesse angulaire à communiquer à l'électron pour l'installer dans l'orbite de rayon  $r_c = r_0$  est

$$r_0 = \frac{m\mathbf{r}_0^4\dot{\boldsymbol{\theta}}_0^2}{k} \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\theta}}_0 = \sqrt{\frac{k}{m\mathbf{r}_0^3}}$$