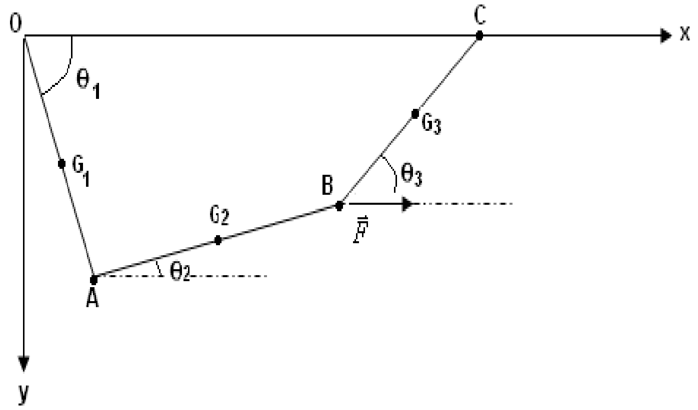
Année Universitaire 2013/2014

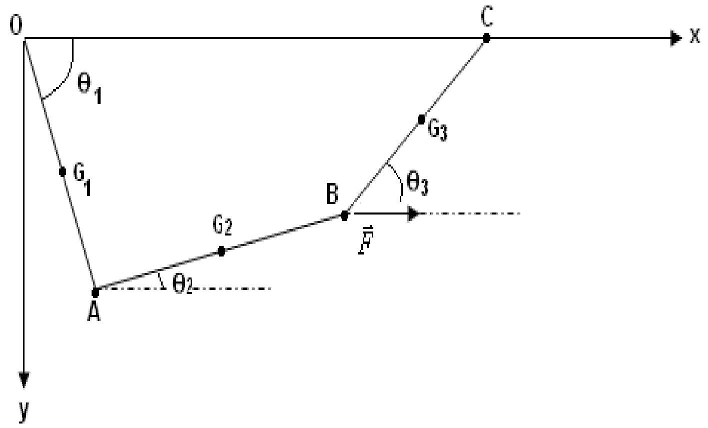
SMP 5 – Module 28
Travaux dirigés de mécanique analytique
Série N° 1 : Fondement de la mécanique analytique

Exercice N° 1 : PRINCIPE DU TRAVAIL VRTUEL

OA, AB et BC barres homogènes identiques (m, 2l) mobiles dans un plan vertical et parfaitement articulées entre elles. O est un point fixe. Le point C est astreint à rester sur l'axe Ox, il n'y a pas de frottements en O et C. En B, est appliquée une force $\vec{F}$. Trouver la position d'équilibre du système.



Correction de l'exercice N° 1 : PRINCIPE DU TRAVAIL VRTUEL



Le système est en équilibre, donc d'après le principe du travail virtuel, on a :

$$\sum \vec{F}_i \delta\vec{r}_i = 0$$

Les seules forces qui travaillent sont les poids des barres appliqués en leurs centres de gravité, et la force $\vec{F}$ *.*

$$\vec{p}_1 \delta\vec{OG}_1 + \vec{p}_2 \delta\vec{OG}_2 + \vec{p}_3 \delta\vec{OG}_3 + \vec{F}\,\delta\vec{OB} = p\,\delta y_{G1} + p\,\delta y_{G2} + p\,\delta y_{G3} + F\,\delta x_B = 0 \qquad (1)$$

$$\begin{cases} y_{G1} = l\sin\theta_1 \\ y_{G2} = 2l\sin\theta_1 - l\sin\theta_2 \\ y_{G3} = 2l\sin\theta_1 - 2l\sin\theta_2 - l\sin\theta_3 \\ x_B = 2l\cos\theta_1 + 2l\cos\theta_2 \end{cases}$$

$y_C = 2l(\sin\theta_1 - \sin\theta_2 - \sin\theta_3) = 0$ *d'où* $\sin\theta_3 = \sin\theta_1 - \sin\theta_2 \Rightarrow y_{G3} = l\sin\theta_1 - l\sin\theta_2$

$$\begin{cases} \delta y_{G1} = l\cos\theta_1\delta\theta_1 \\ \delta y_{G2} = 2l\cos\theta_1\delta\theta_1 - l\cos\theta_2\delta\theta_2 \\ \delta y_{G3} = l\cos\theta_1\delta\theta_1 - l\cos\theta_2\delta\theta_2 \\ \delta x_B = -2l(\sin\theta_1\delta\theta_1 + \sin\theta_2\delta\theta_2) \end{cases}$$

En injectant ces expressions dans l'équation (1), on obtient :

$$4pl\cos\theta_1\delta\theta_1 - 2pl\cos\theta_2\delta\theta_2 - 2Fl(\sin\theta_1\delta\theta_1 + \sin\theta_2\delta\theta_2) = 0$$

$$(2p\cos\theta_1 - F\sin\theta_1)\delta\theta_1 - (p\cos\theta_2 + F\sin\theta_2)\delta\theta_2 = 0 \quad \forall\,\delta\theta_1, \delta\theta_2$$

D'où

$$\begin{cases} 2p\cos\theta_1 - F\sin\theta_1 = 0 \\ p\cos\theta_2 + F\sin\theta_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} tg\ \theta_1 = \dfrac{2mg}{F} \\ tg\ \theta_2 = \dfrac{-mg}{F} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow\ tg\ \theta_1 = -2\ tg\ \theta_2$$

Exercice N° 2 : déplacements virtuels

1- Rappeler ce qu'est un déplacement virtuel et qu'appelle-t-on par le travail virtuel en général ? Que devient ce travail si le système est statique ou se déplace avec un mouvement uniforme ?

2- Considérons une masse **m** placée en A et reliée par deux tiges rigides aux points **O** et B. Les barres de longueur **OA = AB = l** sont articulées en **A**. Le support de l'articulation O est fixe et le patin articulé en B peut glisser sans frottement le long de l'axe horizontal **(voir figure 1)**. Les articulations sont supposées parfaites et les masses des tiges et du patin sont négligeables.

2- 1- Quel est le nombre de degrés de liberté de ce système ?

2- 2- En appliquant le principe de d'Alembert, quelle force $\vec{F}$ faut-il appliquer au patin pour que le système reste en équilibre ?

2- 3- Déterminer la valeur de la réaction en **B**.

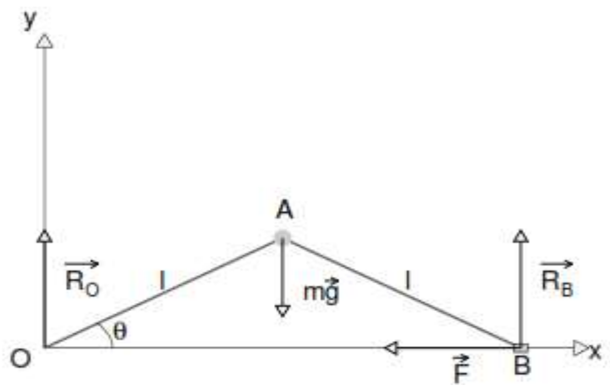


Figure 1 – Système de treillis.

Correction de l'exercice N° 2 : déplacements virtuels

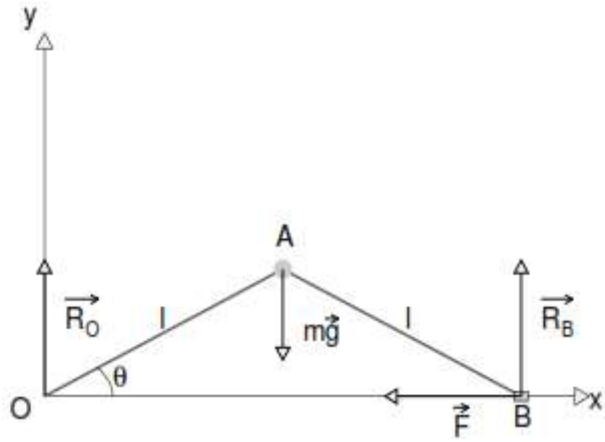


Figure 1 – Système de treillis.

1- Voir cours. Quand le système est statique ou il se déplace d'un mouvement uniforme, le travail de toutes les forces est nul, pas seulement des forces intérieures car la résultante des forces extérieures est nulle.

2-

2- 1- La masse m se déplace dans un plan. Comme, OA = l, alors elle a un seul degré de liberté.

Le mouvement de m peut être bien repéré par la variable θ, qui sera utilisée comme coordonnée généralisée.

2- 2- On dénombre quatre forces : les réactions normales, puisqu'il n'y a pas de frottement $\overrightarrow{R_O}$, $\overrightarrow{R_B}$, aux points O et B, le poids $m\vec{g}$ et la force $\vec{F}$ appliquée au point B.

Le principe d'Alembert stipule que le travail des forces intérieures lors d'un déplacement virtuel est nul. Considérons le déplacement virtuel $\delta\theta$ et calculons la force généralisée selon cette coordonnée :

$$Q_\theta = \sum_i \vec{F_i} \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial \theta}$$

Où $\vec{r_i}$ est le vecteur qui repère le point d'application de la force. Ce qui donne, en utilisant la base cartésienne

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} &= l\cos\theta\vec{i} + l\sin\theta\vec{j} \\ \overrightarrow{OB} &= 2l\cos\theta\vec{i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_\theta &= -mg\vec{j}\frac{\partial\overrightarrow{OA}}{\partial\theta} + \vec{F}\frac{\partial\overrightarrow{OB}}{\partial\theta} \\ &= mgl\cos\theta - 2lF\sin\theta \end{aligned}$$

$m\vec{g} = -mg\,\vec{j}$ et $\vec{F} = -F\vec{i}$ et sachant que R_0 et R_B ne travaillent pas car elles sont perpendiculaires aux déplacements. Or le principe de d'Alembert donne

$$Q_\theta\ \delta\theta = 0 \quad \Longrightarrow \quad F = \frac{mg}{2} cot\theta$$

donc pour cette valeur, le système sera statique.

2- 3- Pour déterminer la valeur de la réaction $\overrightarrow{R_B}$ en B, il suffit de prendre comme déplacement virtuel du point B un cercle de rayon 2lcosθ avec θ constant. Ainsi, $\vec{F}$ ne travaille pas, de même pour $\overrightarrow{R_0}$. Les deux forces qui travaillent sont le poids et $\overrightarrow{R_B}$. Dans cette configuration, les vecteurs $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ deviennent mobiles. Soit R_0 le référentiel par rapport auquel on effectue cette rotation et soit $(\overrightarrow{\imath_0},\overrightarrow{\jmath_0},\overrightarrow{k_0})$ la base orthonormée liée à R_0. Repérons la rotation par l'angle ψ telle que $\psi = (\vec{\imath},\overrightarrow{\imath_0}) = (\vec{\jmath},\overrightarrow{\jmath_0})$, ce qui donne $\frac{d\vec{\imath}}{d\psi} = \vec{\jmath}$ et $\frac{d\vec{\jmath}}{d\psi} = -\vec{\imath}$ et $\dot{\psi} = constante$.

Calculons la coordonnée généralisée associée à ψ.

$$\begin{aligned} Q_\psi &= \frac{\partial\overrightarrow{OA}}{\partial\psi}\cdot m\vec{g} + \frac{\partial\overrightarrow{OB}}{\partial\psi}\cdot(R_B\vec{\jmath}) \\ &= l(\cos\theta\vec{\jmath} - \sin\theta\vec{\imath})\cdot(-mg\vec{\jmath}_0) + 2l\cos\theta\vec{\jmath}\cdot(\mathrm{R_B}\vec{\mathrm{j}}) \\ &= -mgl(\cos\theta\cos\psi - \sin\theta\sin\psi) + 2lR_B\cos\theta \\ &= -mgl\cos(\theta-\psi) + 2lR_B\cos\theta. \end{aligned}$$

Or comme $\ddot{\psi} = 0$, cela implique que le module de la vitesse par rapport à R_0 de tous les points du treillis est constant et comme le mouvement est circulaire alors l'accélération par rapport à R_0 est centrale $\overrightarrow{\gamma_A} = \frac{v_A^2}{l}\overrightarrow{n_A}$ et $\overrightarrow{\gamma_B} = \frac{v_B^2}{2lcos\theta}\overrightarrow{n_B}$ ce qui implique que l'accélération généralisée selon ψ est donnée par :

$$A_\psi = \frac{\partial\overrightarrow{OA}}{\partial\psi}\cdot\vec{\gamma}_A + \frac{\partial\overrightarrow{OB}}{\partial\psi}\cdot\vec{\gamma}_B = 0$$

puisque $\overrightarrow{n_A} = \frac{\overrightarrow{OA}}{\|\overrightarrow{OA}\|}$ et $\overrightarrow{n_B} = \frac{\overrightarrow{OB}}{\|\overrightarrow{OB}\|}$, d'une part, et $\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} \perp \overrightarrow{n_A}$ et $\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt} \perp \overrightarrow{n_B}$, d'autre part.

Le principe d'Alembert $Q_\psi\ \delta\psi = A_\psi\ \delta\psi = 0$ permet d'écrire

$$Q_\psi = 0 \quad \Longrightarrow \quad R_B = \frac{mgcos(\theta - \psi)}{2\ cos\theta}$$

et cette relation est valable quelque soit la valeur de ψ et donc en particulier pour $\psi = 0$ qui nous ramène à la situation du treillis statique

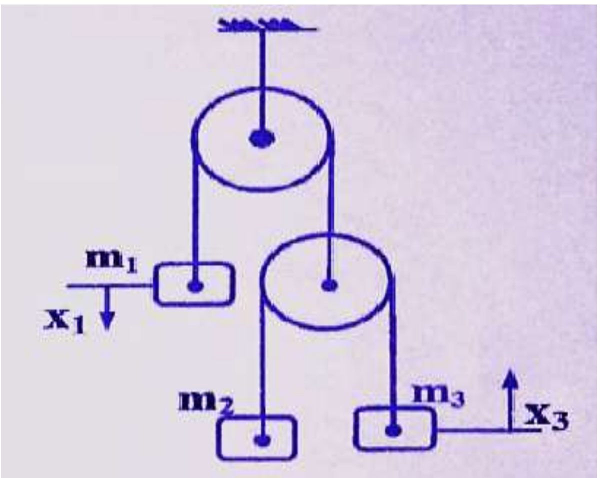
$$R_B = \frac{mg}{2}$$

Exercice N° 3

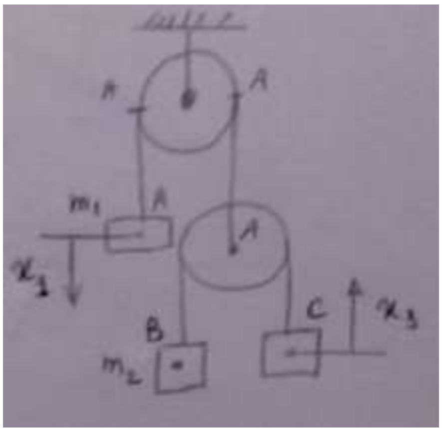
Soit le dispositif à double poulies dont les masses sont négligeables. Les masses **m**$_i$ se déplacent verticalement. En prenant comme coordonnées généralisées, les déplacements des masses **m**$_1$ et **m**$_2$:

1- Calculer les forces généralisées $\mathbf{Q}_{x1}$ et $\mathbf{Q}_{x3}$.

2- Par le principe d'Alembert, calculer les accélérations $\ddot{\mathbf{x}}_\mathbf{1}$ et $\ddot{\mathbf{x}}_\mathbf{3}$.



Correction de l'exercice N° 3



$$\delta x_1 = \delta A$$
$$\delta x_3 = \delta A - r\delta\varphi = \delta x_1 - r\delta\varphi$$
$$\delta x_2 = \delta A + r\delta\varphi = \delta x_1 + r\delta\varphi$$
$$\Rightarrow \delta x_3 + \delta x_2 = 2\delta x_1 \quad \Rightarrow \quad \delta x_2 = 2\delta x_1 - \delta x_3$$

Donc $\ddot{x_2} = 2\ddot{x_1} - \ddot{x_3}$

1- Les forces généralisées Q_{x_1} et Q_{x_3} $\quad q_1 = x_1 \quad$ et $\quad q_3 = x_3$

$$\delta W = Q_{x_1}\delta x_1 + Q_{x_3}\delta x_3 = m_1\vec{g}\,.\overrightarrow{\delta A} + m_2\vec{g}\,.\overrightarrow{\delta B} + m_3\vec{g}\,.\overrightarrow{\delta C}$$
$$= m_1 g\delta x_1 + m_2 g\,(2\delta x_1 - \delta x_3) - m_3 g\,\delta x_3$$
$$= (m_1 g + 2m_2 g)\delta x_1 + (-m_2 g - m_3 g)\,\delta x_3$$

$$\Rightarrow Q_{x_1} = (m_1 + 2m_2)g \quad \text{et} \quad Q_{x_3} = -(m_2 + m_3)g$$

2- Par d'Alembert, Equations de mouvement s'écrit :

$$\delta A = \delta W$$
$$\delta A = m_1\ddot{x_1}\delta x_1 + m_2\ddot{x_2}\delta x_2 + m_3\ddot{x_3}\delta x_3$$
$$= m_1\ddot{x_1}\delta x_1 + m_2(2\ddot{x_1} - \ddot{x_3})(2\delta x_1 - \delta x_3) + m_3\ddot{x_3}\delta x_3$$
$$= [m_1\ddot{x_1} + 2m_2(2\ddot{x_1} - \ddot{x_3})]\delta x_1 + [m_3\ddot{x_3} + m_2(2\ddot{x_1} - \ddot{x_3})]\delta x_3$$
$$\Rightarrow \begin{cases} m_1\ddot{x_1} + 2m_2(2\ddot{x_1} - \ddot{x_3}) = (m_1 + 2m_2)g \\ m_3\ddot{x_3} + m_2(2\ddot{x_1} - \ddot{x_3}) = -(m_2 + m_3)g \end{cases}$$

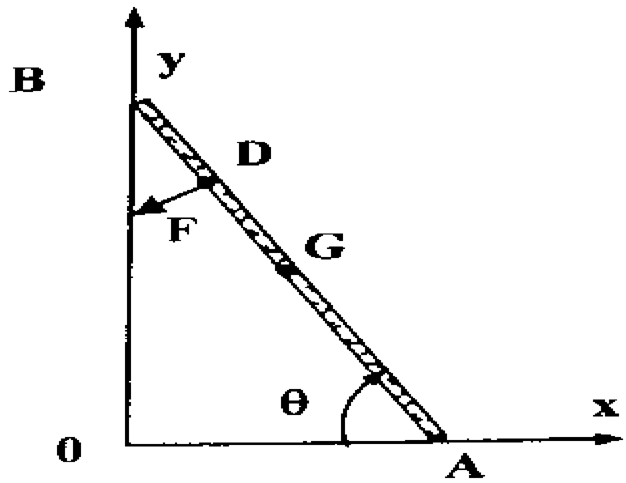
Exercice N° 4

Une échelle de masse **m** et de longueur **L** s'appuie contre le mur vertical sans frottement faisant l'angle θ. Au point D s'applique une force **F** perpendiculaire à l'échelle. $AD = \frac{3L}{4}$.

Par le principe des travaux virtuels :

1- Quelle est la force de frottement T avec le sol à l'équilibre.

2- Calculer la réaction R_A.



Correction de l'exercice N° 4

1- Calcul de T par le P.T.V

$\overrightarrow{R_A}.\delta A = 0$; $\overrightarrow{R_B}.\delta B = 0$

$$\delta W = 0 \;\Rightarrow \vec{P}.\delta\overrightarrow{OG} + \vec{F}.\delta\overrightarrow{OD} + \vec{T}.\delta\overrightarrow{OA} = 0$$

Avec : $\begin{cases} y_G = \frac{L}{2}\sin\theta & \Rightarrow \quad \delta y_G = \frac{L}{2}\cos\theta\;\delta\theta \\ x_G = L\cos\theta & \Rightarrow \quad \delta x_G = -L\sin\theta\;\delta\theta \end{cases}$

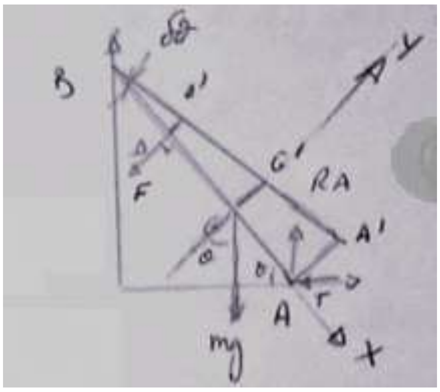
On écrit donc : $-\,mg.\delta y_G + (F_x.\delta x_D) + \left(F_y.\delta y_D\right) - T.\delta x_A = 0$

$\overrightarrow{OD} = \begin{cases} \frac{L}{4}\cos\theta \\ \frac{3L}{4}\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \delta\overrightarrow{OD} = \begin{cases} -\frac{L}{4}\sin\theta\;\delta\theta \\ \frac{3L}{4}\cos\theta\;\delta\theta \end{cases}$ $\quad\quad \vec{F} = \begin{cases} -F\sin\theta \\ -F\cos\theta \end{cases}$

$$\delta W = \left[-mg\frac{L}{2}\cos\theta + \frac{FL}{4}(\sin^2\theta - 3\cos^2\theta) + TL\sin\theta\right]\delta\theta = Q_\theta\delta\theta$$

$\delta\theta \neq 0 \;\Rightarrow\; Q_\theta = 0$

Donc : $T = \frac{mg}{2}\operatorname{cotg}\theta - \frac{F}{4}(\sin^2\theta - 3\operatorname{cotg}\theta\;\cos\theta)$



2- Calcul de R_A : soit de (a) ou (b)

(a) par rotation de $\delta\theta$ autour du point B

$$\delta W = m\vec{g}.\delta\vec{G} + \left(\overrightarrow{R_A} + \vec{T}\right).\delta\vec{A} + \vec{F}.\delta\vec{D} = 0$$

$$\delta W = m\vec{g}.\overrightarrow{GG'} + \left(\overrightarrow{R_A} + \vec{T}\right).\overrightarrow{AA'} + \vec{F}.\overrightarrow{DD'} = 0$$

$$\delta W = (-mgcos\theta)\frac{L}{2}\delta\theta + (R_A cos\theta - Tsin\theta)L\delta\theta$$

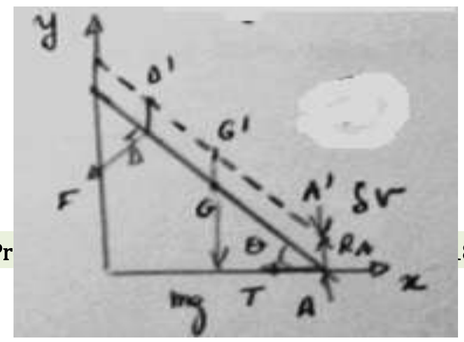
$$-\,F\frac{L}{4}\delta\theta = 0$$

$R_A = \frac{mg}{2} + T\;tg\theta + F\frac{L}{4cos\theta}$

Soit

(b) par translation de δr le long de l'axe y

$\delta G = \delta A = \delta D = \delta r \qquad\qquad (\vec{T} \perp \delta\vec{r})$

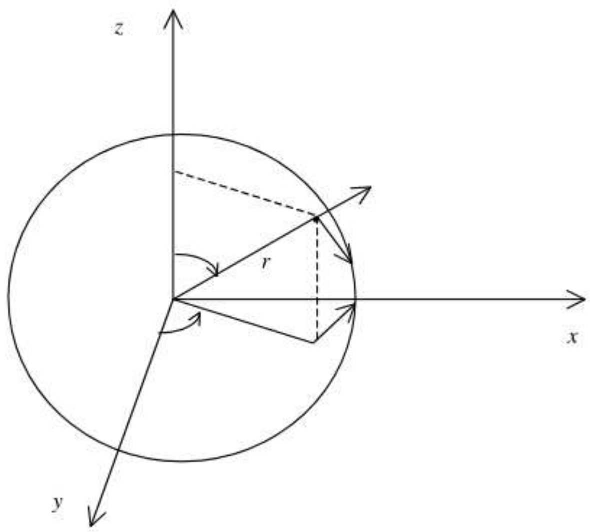


$$R_A.\delta r - mg\,\delta r - F\cos\theta.\delta r = 0$$
$$\Longrightarrow \quad R_A = mg + F\cos\theta$$

Exercice N° 5 : Mouvement d'une bille à l'intérieur d'une sphère creuse

On considère une sphère creuse **(S)** de rayon **a** fixe dans un repère galiléen **(O, x, y, z)** lié à la surface de la terre. Une bille supposée ponctuelle de masse **m** est astreint à se déplacer sans frottement sur la surface intérieure de la sphère.

1. Déterminer le nombre de degré de liberté de la bille.
2. Calculer les forces généralisées Q_r ;Q_θ et Q_φ associés aux déplacements virtuels élémentaires δr, $\delta\theta$ et $\delta\varphi$ où r, θ et φ sont les coordonnées sphériques de la bille.
3. Par application du principe de d'Alembert, trouver l'équation du mouvement et l'expression de la force de contact.



Correction de l'exercice N° 5

1°) La bille se déplaçant sur une surface, deux coordonnées suffisent pour la repérer. En particulier, en coordonnées sphériques, il suffit de connaître θ et φ car $r = a = cste$.

Notons que : $\frac{\partial \vec{e_r}}{\partial r} = \frac{\partial \vec{e_\theta}}{\partial r} = \frac{\partial \vec{e_\varphi}}{\partial r} = \vec{0}$, $\frac{\partial \vec{e_r}}{\partial \theta} = \vec{e_\theta}$ $\frac{\partial \vec{e_\varphi}}{\partial \theta} = \vec{0}$, $\frac{\partial \vec{e_\theta}}{\partial \theta} = -\vec{e_r}$, $\frac{\partial \vec{e_r}}{\partial \varphi} = \sin\theta \vec{e_\varphi}$, $\frac{\partial \vec{e_\theta}}{\partial \varphi} = \cos\theta \vec{e_\varphi}$ et $\frac{\partial \vec{e_\varphi}}{\partial \varphi} = -\sin\theta \vec{e_r} - \cos\theta \vec{e_\theta}$

2°) - $Q_r = \sum_i \vec{F_i}.\frac{\partial \vec{r_i}}{\partial r} = \vec{P} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} + \vec{N} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r}$

or, $\overrightarrow{OM} = r\vec{e_r} \Longrightarrow \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} = \vec{e_r}$

donc $Q_r = \left(\vec{P} + \vec{N}\right) \cdot \vec{e_r} = (-mg\vec{e_z} - N\vec{e_r}) \cdot \vec{e_r} = -(N + mg\cos\theta)$ car $\vec{e_z} \cdot \vec{e_r} = \cos\theta$.

- $Q_\theta = \sum_i \vec{F_i}.\frac{\partial \vec{r_i}}{\partial \theta} = \vec{P} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} + \vec{N} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}$

or, $\overrightarrow{OM} = r\vec{e_r} \Longrightarrow \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = r\vec{e_\theta}$

d'où, $Q_\theta = (-mg\vec{e_z} - N\vec{e_r}) \cdot r\vec{e_\theta} = -mg\vec{e_z} \cdot r\vec{e_\theta} = mgr\sin\theta$

- $Q_\varphi = 0$ car $\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi} = r\sin\theta\vec{e_\varphi} \perp \vec{P}, \vec{N}$.

3°) Principe de d'Alembert :

$\sum_{q=1}^{d} Q_q \delta q - m\vec{a}.\delta\vec{r} = 0$

$\Longleftrightarrow (Q_r\delta r + Q_\theta\delta\theta + Q_\varphi\delta\varphi) - m\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\cdot\delta\overrightarrow{OM} = 0 \qquad (*)$

or, $\delta\overrightarrow{OM} = \delta r\vec{e_r} + r\delta\theta\vec{e_\theta} + r\sin\theta\delta\varphi\vec{e_\varphi}$

$\overrightarrow{OM} = r\vec{e_r} \Longrightarrow \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta} + r\sin\theta\dot{\varphi}\vec{e_\varphi}$

En tenant compte de la liaison holonôme $r = a$ donc $\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial t} = a\dot{\theta}\vec{e_\theta} + a\sin\theta\dot{\varphi}\vec{e_\varphi}$

d'où $\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = a\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - a\dot{\theta}^2\vec{e_r} + 2a\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\vec{e_\varphi} + a\ddot{\varphi}\sin\theta\vec{e_\varphi} + a\dot{\varphi}^2\sin\theta(-\sin\theta\vec{e_r} - \cos\theta\vec{e_\theta})$

car, qd θ varie, $\vec{e_r}$ et $\vec{e_\theta}$ varient : $\frac{d\vec{e_r}}{d\theta} = \vec{e_\theta}$, $\frac{d\vec{e_\theta}}{d\theta} = -\vec{e_r}$

qd φ varie, $\vec{e_r}$, $\vec{e_\theta}$ et $\vec{e_\varphi}$: $\frac{d\vec{e_r}}{d\varphi} = \sin\theta\vec{e_\varphi}$, $\frac{d\vec{e_\theta}}{d\varphi} = \cos\theta\vec{e_\varphi}$, $\frac{d\vec{e_\varphi}}{d\varphi} = -\sin\theta\vec{e_r} - \cos\theta\vec{e_\theta}$.

d'où $m\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\cdot\delta\overrightarrow{OM} = m\left(\left(-a\dot{\theta}^2 - a\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)\vec{e_r} + \left(a\ddot{\theta} - a\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\vec{e_\theta} + \left(2a\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + a\ddot{\varphi}\sin\theta\right)\vec{e_\varphi}\right)\cdot$
$(\delta r\vec{e_r} + a\delta\theta\vec{e_\theta} + a\sin\theta\delta\varphi\vec{e_\varphi})$

$= m\left(\left(-a\dot{\theta}^2 - a\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)\delta r + \left(a^2\ddot{\theta} - a^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\delta\theta + \left(2a^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\sin\theta + a^2\ddot{\varphi}\sin^2\theta\right)\delta\varphi\right)$

$$\begin{cases} Q_r + m\left(a\dot{\theta}^2 + a\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right) = 0 \\ Q_\theta - m\left(a^2\ddot{\theta} - a^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right) = 0 \\ Q_\varphi - m\left(2a^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\sin\theta + a^2\ddot{\varphi}\sin^2\theta\right) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -(N + mg\cos\theta) + m\left(a\dot{\theta}^2 + a\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right) = 0 \\ mga\sin\theta - m\left(a^2\ddot{\theta} - a^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right) = 0 \\ ma^2\frac{d}{dt}\left(\sin^2\theta\dot{\varphi}\right) = 0 \end{cases}$$

* 1^{er} cas : $sin\theta = cste \Longleftrightarrow \dot{\varphi} = cste$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -(N + mg\cos\theta) + ma\dot{\varphi}^2\sin^2\theta = 0 \\ g\sin\theta + a\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta = 0 \\ \theta = cste \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} N = -\frac{mg\sin^2\theta}{\cos\theta} - mg\cos\theta = -\frac{mg}{\cos\theta} \\ \dot{\varphi}^2 = -\frac{g}{a\cos\theta} \\ \theta = cste \end{cases} \text{si } \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

et $\theta \neq \pi$ car $N > 0$

ou $\begin{cases} N = mg \\ \theta = \pi \end{cases}$

* $2^{ème}$ cas : $\dot{\varphi} = 0$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -(N + mg\cos\theta) + ma\dot{\theta}^2 = 0 \\ g\sin\theta - a\ddot{\theta} = 0 \\ \varphi = cste \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} N = -3mg\cos\theta + maK \\ \dot{\theta}^2 = -\frac{2g}{a}\cos\theta + K \\ \varphi = cste \end{cases}$$ où K est une constante et $N > 0$.

Exercice N° 6 : Le cric

Ce problème est une simple application du principe de d'Alembert.

Un cric est un mécanisme articulé destiné à soulever de lourdes charges (une voiture Par exemple), représenté sur la figure ci-dessous. Il est constitué de deux plateaux rigides (l'un prenant appui sur le sol, l'autre soutenant la charge de poids P) articulés à un losange déformable de côté **l**, par l'intermédiaire d'une tige filetée de pas **h**, (l'entraxe du cric change d'une longueur **h** en un tour de manivelle) actionnée par une force **F** exercée sur une manivelle de bras **a**.

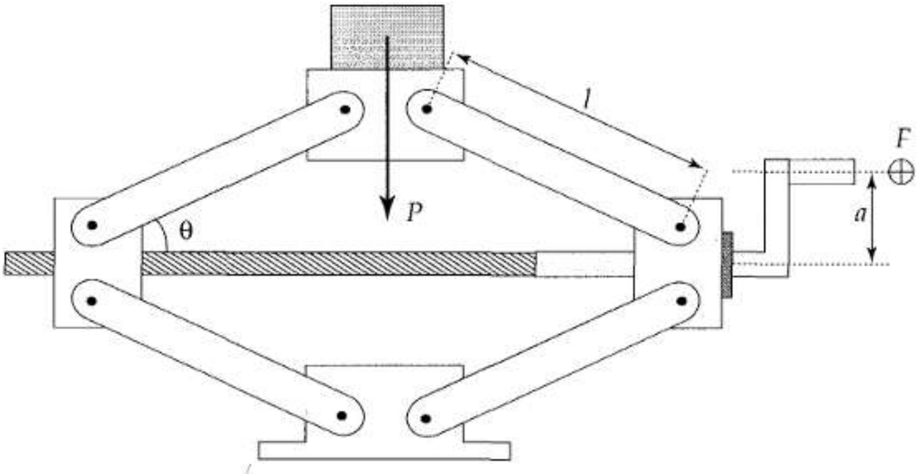


Figure : Principe du cric.

On suppose aucun frottement sur les parties mécaniques du cric (heureusement dans la réalité les forces de frottement existent et permettent de retenir la masse sans effort !).

1 En inspectant les contraintes pour le système, montrer que celui-ci est à un seul degré de liberté. Quelle coordonnée généralisée vous semble la plus pertinente ?

2 En utilisant le principe de d'Alembert, donner le lien entre le poids à soulever et la force exercée, en fonction des caractéristiques du cric et de l'angle θ que fait un côté du losange avec la tige filetée.

Application numérique : Calculer le rapport entre le poids soulevé et la force exercée, pour un cric de bras de manivelle **a =20 cm**, de filetage **h =2 mm**, au début du levage lorsque $\theta = 30°$.

Correction de l'exercice N° 6 : Le cric

On nomme ABCD le losange du cric, le sommet A sous le poids, le sommet B a la manivelle et O le centre du losange, au milieu de la tige filetée BD. A priori la configuration du système est donnée par l'angle α que fait la manivelle avec la verticale, et par la forme du losange, c'est-à-dire les valeurs de DB et AC. En fait, nous avons une première contrainte holonôme due à la distance invariante du côté du losange $^{2} + OB^{2} = l^{2}$. Nous avons une deuxième contrainte holonôme due à la tige filetée qui donne un lien entre α et DB (lorsque α varie de 2π, DB varie de h). Finalement l'angle α seul permet de décrire la configuration du système ; celui-ci est à un degré de liberté.

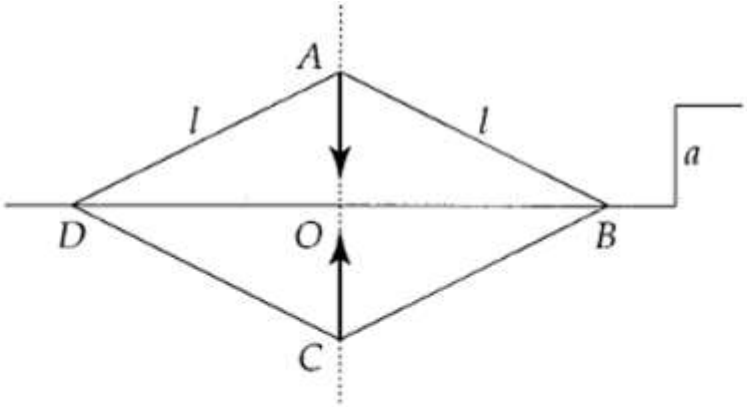


Figure : Losange ABCD représentant le cric de façon schématique

Faisons un déplacement virtuel $\delta\alpha$ dans le sens direct. La tige filetée augmente sa longueur DB de $\delta x = h\delta\alpha/(2\pi)$ et la longueur OB=OD de $\delta 0B = \delta x/2$. En conséquence OA diminue, puisque la relation $OA^2 + OB^2 = l^2$ doit toujours être satisfaite.

Il est facile, dans ces conditions, de voir que $\delta CA = 2\delta 0A = -\delta x \,/\, tan\, \theta$. On obtient ainsi la variation d'altitude du poids en fonction du déplacement virtuel : $\delta z = \delta CA = -h\delta\alpha/(2\pi tan\theta)$.

2- Les forces intervenant sont :

• le poids P agissant en A qui effectue un travail : $\delta W_p = -P\delta z = Ph\delta\alpha/(2\pi tan\theta)$;

• la force du point d'appui dont le point d'application ne bouge pas et qui ne travaille donc pas ;

• la force F agissant sur la manivelle dont le travail virtuel a pour expression $\delta W_F = -Fa\delta\alpha$ (si on veut maintenir l'équilibre, la force doit être opposée au sens de rotation direct considéré ci-dessus).

Le travail virtuel total $\delta W = (Ph\,/(2\pi tan\theta) - Fa)\delta a = Q_\alpha \delta\alpha$ est la somme de ces deux travaux. On en déduit la force généralisée $Q_\alpha = Ph\,/\,(2\pi tan\theta) - Fa$. A l'équilibre, le principe de d'Alembert impose une force généralisée nulle, ce qui conduit à l'expression demandée :

$$\frac{P}{F} = \frac{2\pi a tan\theta}{h}$$

Pour avoir un rapport aussi grand que possible (ce qui est la justification du principe Du cric), il faut choisir un grand bras de manivelle et/ou un petit pas de vis.

Application numérique : Avec $a = 20\ cm$, $h = 0{,}2\ cm$ et $tan\ \theta = 0{,}577$, on trouve $P\,/F \cong 363$, ce qui permet de maintenir soulevée une voiture de 16000 N avec une force de seulement F = 11 N (n'oublions pas que $P = 16000\,/\,4$ dans ce cas).