

Chapitre II

FORMALISME LAGRANGIEN

Equations d'Euler-Lagrange (EEL)

Objectifs pédagogiques

Savoir écrire le Lagrangien pour n'importe quel système mécanique qui contient des Liaisons et résoudre le problème.

I- Equations de Lagrange

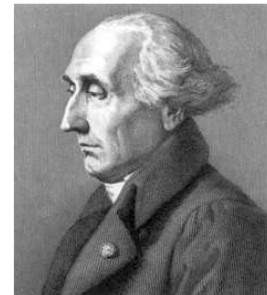
Les équations de Lagrange, dites aussi équations d'Euler-Lagrange, décrivent la dynamique du système par le biais d'une fonctionnelle que l'on appelle la fonction de Lagrange et que l'on note:

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) \quad (2.0)$$

et qui est homogène à une énergie.

Lagrangien d'un système

$$L = T - V$$



Lagrangien

Energie cinétique

Energie potentielle

Deux approches pour établir les équations de Lagrange :

- à partir du principe fondamental de la dynamique : on utilisera dans cette approche les notions de forces généralisées, accélérations généralisées et du travail virtuel.
- à partir du principe variationnel : à partir duquel on définira le principe dit de "moindre action" ;

Le principe d'Alembert en dynamique s'écrit :

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \ddot{\vec{r}}^{\alpha} \frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial \vec{q}_i} - \sum_{\alpha} \vec{F}^{\alpha} \frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial \vec{q}_i} = 0$$

On a donc :

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \ddot{\vec{r}}^{\alpha} \frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial \vec{q}_i} = Q_i$$

Intégrons par parties le terme de droite :

$$\sum_{\alpha}^N m_{\alpha} \vec{r}^{\alpha} \frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial \vec{q}_i} = \sum_{\alpha}^N \frac{d}{dt} \left(m_{\alpha} \dot{\vec{r}}^{\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial \vec{q}_i} \right) - m_{\alpha} \dot{\vec{r}}^{\alpha} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial \vec{q}_i} \right) \quad (2.1)$$

Nous allons maintenant établir les deux relations suivantes,

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}^{\alpha}}{\partial \dot{\vec{q}}_i} = \frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial \vec{q}_i} ?$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial \vec{q}_i} \right) = \frac{\partial}{\partial \vec{q}_i} \left(\frac{d \vec{r}^{\alpha}}{dt} \right) ?$$

Pour les remplacer dans la relation précédente (2.1)

Or

$$\vec{v}^{\alpha} = \dot{\vec{r}}^{\alpha} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial \vec{q}_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{v}^{\alpha}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial \vec{q}_i} \quad (2.2)$$

Ainsi nous avons:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial \vec{q}_i} \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \vec{r}^{\alpha}}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \vec{r}^{\alpha}}{\partial t \partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \vec{v}^{\alpha}}{\partial q_i}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \vec{q}_i} \left(\frac{d \vec{r}^{\alpha}}{dt} \right) \quad (2.3)$$

Revenons à l'équation (2.1):

$$\forall i = 1, \dots, n ; \sum_{\alpha}^N \frac{d}{dt} \left(m_{\alpha} \dot{\vec{r}}^{\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial \vec{q}_i} \right) - m_{\alpha} \dot{\vec{r}}^{\alpha} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial \vec{q}_i} \right) = Q_i \quad (2.1)$$

Avec les relations (2.2) et (2.3) que nous venons de démontrer, le terme des forces d'inertie devient :

$$\forall i = 1, \dots, n ; \sum_{\alpha}^N \frac{d}{dt} \left(m_{\alpha} \dot{\vec{r}}^{\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial \dot{\vec{q}}_i} \right) - m_{\alpha} \dot{\vec{r}}^{\alpha} \cdot \left(\frac{\partial \dot{\vec{r}}^{\alpha}}{\partial \dot{\vec{q}}_i} \right) = Q_i$$

$$\forall i = 1, \dots, n ; \sum_{\alpha}^N \frac{d}{dt} \left(m_{\alpha} \vec{v}^{\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{v}^{\alpha}}{\partial \dot{\vec{q}}_i} \right) - m_{\alpha} \vec{v}^{\alpha} \cdot \left(\frac{\partial \vec{v}^{\alpha}}{\partial \dot{\vec{q}}_i} \right) = Q_i$$

$$\forall i = 1, \dots, n ; \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{\vec{q}}_i} \sum_{\alpha}^N \frac{1}{2} m_{\alpha} \vec{v}^{\alpha 2} \right) - \frac{\partial}{\partial \vec{q}_i} \sum_{\alpha}^N \frac{1}{2} m_{\alpha} \vec{v}^{\alpha 2} = Q_i$$

En notant T la somme des énergies cinétiques de toutes les parties mobiles :

$$\forall i = 1, \dots, n ; \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{q}}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \vec{q}_i} = Q_i(0) \quad (2.4)$$

Remarque : on peut obtenir ce résultat en utilisant l'expression de l'énergie cinétique.

L'énergie cinétique totale du système :

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \overline{v^{\alpha}}^2 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \overline{v^{\alpha}} \frac{\partial \overline{v^{\alpha}}}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \overline{v^{\alpha}} \frac{\partial \overline{r^{\alpha}}}{\partial q_i} \\
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) &= \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \left(\overline{v^{\alpha}} \frac{\partial \overline{r^{\alpha}}}{\partial q_i} + \overline{v^{\alpha}} \cdot \frac{\partial \overline{v^{\alpha}}}{\partial q_i} \right) = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \overline{v^{\alpha}} \frac{\partial \overline{r^{\alpha}}}{\partial q_i} + \frac{\partial T}{\partial q_i} \\
 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) \cdot \delta \overline{r^{\alpha}} &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \overline{v^{\alpha}} \frac{\partial \overline{r^{\alpha}}}{\partial q_i} \right) \cdot \delta \overline{r^{\alpha}} = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \overline{v^{\alpha}} \cdot \delta \overline{r^{\alpha}} \\
 \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i \right) \cdot \delta \overline{r^{\alpha}} &= \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \overline{v^{\alpha}} \cdot \delta \overline{r^{\alpha}} - \sum_{i=1}^n Q_i \cdot \delta q_i \\
 &= \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \overline{v^{\alpha}} \cdot \delta \overline{r^{\alpha}} - \sum_{\alpha=1}^N \overline{F_{\alpha}} \cdot \delta \overline{r^{\alpha}} = \sum_{\alpha=1}^N (m_{\alpha} \overline{v^{\alpha}} - \overline{F_{\alpha}}) \cdot \delta \overline{r^{\alpha}}
 \end{aligned}$$

Si tous les δq_i indépendants (Système holonome) :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i = 0$$

1- Equations de Lagrange : Cas de forces conservatives

Lorsque toutes les forces $\overline{F^{\alpha}}$ dérivent d'une énergie potentielle totale V , les forces généralisées s'écrivent :

$$Q_i = \sum_{\alpha=1}^N -\nabla_{\alpha} V \cdot \frac{\partial \overline{r^{\alpha}}}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \quad (2.5)$$

Les équations de Lagrange deviennent :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \right) = - \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} \right) \quad (2.6)$$

NB : L'énergie potentielle totale $V(q, t)$ ne dépend pas de la vitesse généralisée $\dot{q}_i$, nous pouvons ajouter le terme nul $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i}$ à l'équation précédente:

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (T - V) \right) - \left(\frac{\partial}{\partial q_i} (T - V) \right) = 0$$

Définition : Lagrangien

La fonction des n coordonnées généralisées q_i , des n vitesses généralisées $\dot{q}_i$, et du temps t :

$$L(q, \dot{q}, t) = T - V$$

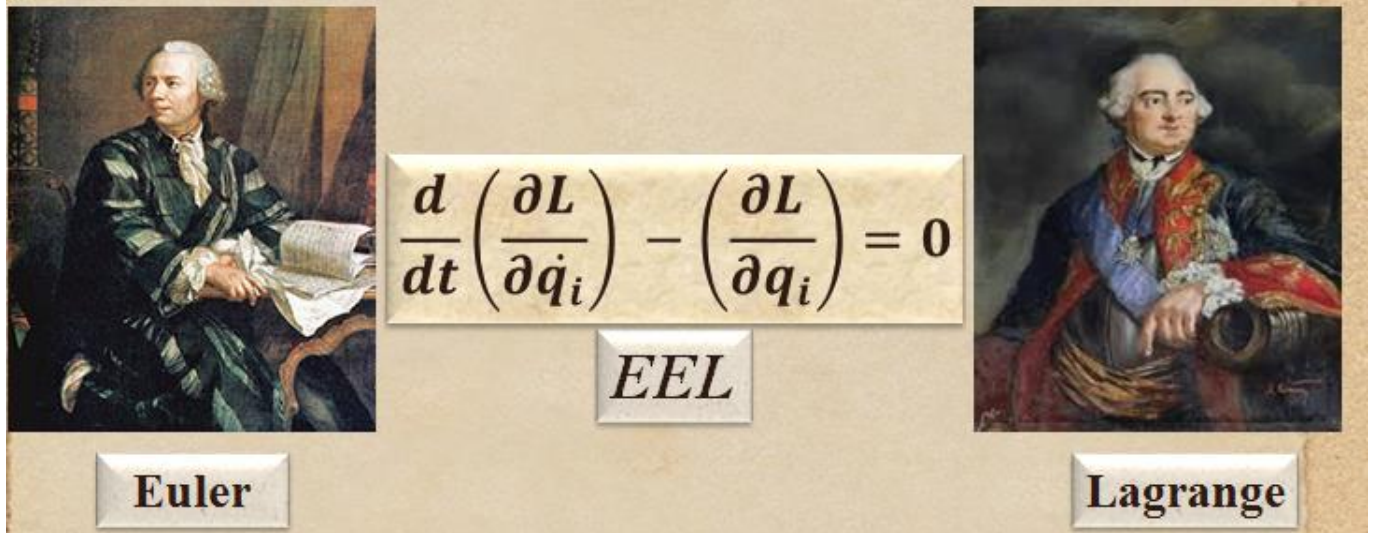
est appelée fonction de Lagrange ou Lagrangien.

Remarque : Par l'intermédiaire de l'énergie potentielle V , le Lagrangien dépend du choix de l'origine des énergies potentielles.

Nous obtenons les n équations de Lagrange (1788) :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = 0 \quad (2.7)$$

Ces n équations différentielles sont du second ordre par rapport au temps. Chaque intégration faisant apparaître une constante, il faudra spécifier $2n$ conditions initiales pour déterminer les n coordonnées généralisées indépendantes : n conditions initiales pour les $\dot{q}_i$ et n pour les q_i .



Exemple : Masse glissant sans frottements sur un plan incliné

Une masse m glisse sans frottements sur un plan incliné.
Quelle est l'équation de son mouvement ?

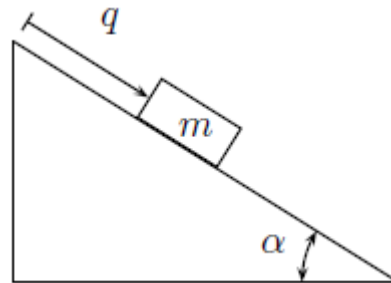


Figure 2. 1. Masse glissant sans frottements sur un plan incliné

En prenant l'origine de l'énergie potentielle de gravitation au sommet du plan incliné, le Lagrangien a pour expression :

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + mgq \sin \alpha$$

L'équation de Lagrange s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q} \right) &= 0 \\ \frac{d}{dt} (m\dot{q}) - mg \sin \alpha &= 0 \\ \ddot{q} - g \sin \alpha &= 0 \end{aligned}$$

2. Energie potentielle généralisée

Lorsque les forces sont engendrées par une énergie potentielle généralisée $U(q, \dot{q}, t)$ telle que,

$$Q_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} \right) \quad (2.8)$$

Alors, à partir de l'équation (2.7) :

$$\begin{aligned} \forall i = 1, \dots, n \quad & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \right) = Q_i \\ \forall i = 1, \dots, n \quad & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} \right) \\ \forall i = 1, \dots, n \quad & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (T - V) \right) - \left(\frac{\partial}{\partial q_i} (T - V) \right) = 0 \end{aligned}$$

En définissant le Lagrangien généralisé par $L = T - U$, nous retrouvons les équations de Lagrange (2.7):

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = 0 \quad (2.7)$$

Exemple : Particule chargée en mouvement dans un champ électromagnétique

Le champ électrique $\vec{E}$ et le champ magnétique B dérivent du potentiel scalaire $\phi(r, t)$ et du potentiel vecteur $A(r, t)$:

$$\begin{cases} \vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = \nabla \wedge \vec{A} \end{cases}$$

Où le produit vectoriel de l'opérateur nabla avec le vecteur $\vec{A}$ est le vecteur rotationnel de $\vec{A}$. Soit q la charge électrique de la particule, et soit v sa vitesse dans le champ magnétique. Sur cette particule s'exerce une force électromagnétique, appelée force de Lorentz, dont le modèle expérimental a pour expression :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = q \left(-\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \wedge (\nabla \wedge \vec{A}) \right)$$

En projetant sur les axes :

$$\begin{cases} F_x = q \left\{ -(\nabla\phi)_x - \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)_x + \vec{v} \wedge [(\nabla \wedge \vec{A})]_x \right\} \\ F_y = q \left\{ -(\nabla\phi)_y - \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)_y + \vec{v} \wedge [(\nabla \wedge \vec{A})]_y \right\} \\ F_z = q \left\{ -(\nabla\phi)_z - \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)_z + \vec{v} \wedge [(\nabla \wedge \vec{A})]_z \right\} \end{cases}$$

Par exemple, pour la composante en x :

$$F_x = q \left[-\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} + v_y \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - v_z \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \right]$$

Or,

$$\begin{aligned} dA_x &= \frac{\partial A_x}{\partial t} dt + \frac{\partial A_x}{\partial x} dx + \frac{\partial A_x}{\partial y} dy + \frac{\partial A_x}{\partial z} dz \\ \frac{dA_x}{dt} &= \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial A_x}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \dot{z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial t} &= \frac{dA_x}{dt} - \frac{\partial A_x}{\partial x} v_x - \frac{\partial A_x}{\partial y} v_y - \frac{\partial A_x}{\partial z} v_z \end{aligned}$$

Nous donne :

$$\begin{aligned} F_x &= q \left[-\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{dA_x}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial A_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial A_x}{\partial z} v_z + v_y \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \right. \\ &\quad \left. - v_z \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \right] = q \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{dA_x}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial A_y}{\partial x} v_y + \frac{\partial A_z}{\partial x} v_z \right) \\ &= q \left[-\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (\vec{v} \cdot \vec{A}) - \frac{dA_x}{dt} \right] = q \left\{ -\frac{\partial}{\partial x} (\Phi - \vec{v} \cdot \vec{A}) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial v_x} (\vec{v} \cdot \vec{A}) \right] \right\} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} [q(\Phi - \vec{v} \cdot \vec{A})] + \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial v_x} [q(\Phi - \vec{v} \cdot \vec{A})] \right\} \end{aligned}$$

On pose,

$V = q(\Phi - \vec{A} \cdot \vec{v})$: Qui est l'énergie potentielle généralisée qui engendre la force de Lorentz :

$$F_x = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial v_x} \right) - \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) \quad (2.9)$$

En prenant un Lagrangien généralisé,

$$L = T - V = \frac{1}{2} m v^2 - q(\Phi - \vec{A} \cdot \vec{v}) \quad (2.10)$$

On retrouve les mêmes équations de Lagrange.

3. Forces ne dérivant pas toutes d'une énergie potentielle.

Lorsque les forces ne dérivent pas toutes d'une énergie potentielle, les équations de Lagrange s'écrivent,

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \right) = -\frac{\partial V}{\partial q_i} + \sum_{\alpha=1}^p \vec{f}_{nc}^{\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial q_i} \quad (2.11)$$

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = Q_i^{nc} \quad (2.12)$$

Dans lesquelles le Lagrangien contient les énergies potentielles de toutes les forces dérivant d'une énergie potentielle indépendante des vitesses généralisées.

Avec ;

$$Q_i^{nc} = \sum_{a=1}^p \vec{f}_{nc}^a \cdot \frac{\partial \vec{r}^a}{\partial q_i} \quad (2.13)$$

Q_i^{nc} : Force généralisée non conservative

Exemple. Forces de frottement sec

Soit une masse m glissant avec frottements sur un plan incliné d'un angle α .

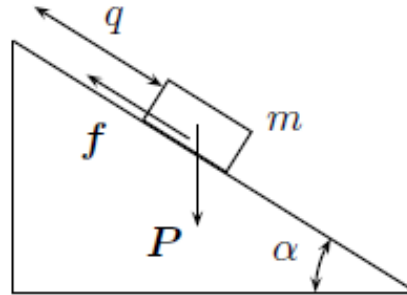


Figure 2. 2 : Masse glissant avec frottements sur un plan incliné

Quelle est l'équation de son mouvement ?

On prend comme modèle de forces de frottements cinétiques, une force proportionnelle à la composante du poids qui s'exerce sur le plan incliné, et s'opposant au déplacement de la masse :

$$\vec{f} = -\mu mg \cos \alpha \frac{\vec{v}}{v}$$

En utilisant la coordonnée généralisée q , l'énergie cinétique s'écrit :

$$T = \frac{1}{2} m \dot{q}^2$$

(La coordonnée y ne peut être prise comme coordonnée généralisée car x apparaîtrait dans l'expression de l'énergie cinétique). Le Lagrangien s'écrit :

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + mgq \sin \alpha$$

L'équation de Lagrange s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q} \right) &= Q \\ \frac{d}{dt} (m\dot{q}) - mg \sin \alpha &= \vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q} \\ \ddot{q} - g \sin \alpha &= -\mu g \cos \alpha \end{aligned}$$

Exemple. Forces de frottement visqueux

Les forces de frottement visqueux proportionnelles à la vitesse, s'écrivent:

$$\vec{f} = -\mu \vec{v}$$

Nous pouvons les réécrire sous la forme :

$$\vec{f} = -\nabla_v \left(\frac{1}{2} \mu v^2 \right)$$

Avec ϕ la fonction de dissipation de Rayleigh, définie par,

$$\phi = \frac{1}{2} \mu v^2$$

Nous avons : $\vec{f} = -\nabla_v \phi$

En partant de la définition des composantes de la force généralisée, nous avons :

$$Q_i^{nc} = \sum_{\alpha}^N \vec{f}_{nc}^{\alpha} \frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial \mathbf{q}_i} = - \sum_{\alpha}^N \nabla_v \phi \cdot \frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial \mathbf{q}_i}$$

En utilisant la relation suivante,

$$\frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial \mathbf{q}_i} = \frac{\partial \vec{v}^{\alpha}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i}$$

Et on écrit

$$Q_i^{nc} = - \sum_{\alpha}^N \nabla_v \phi \cdot \frac{\partial \vec{v}^{\alpha}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} = - \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i}$$

Les équations de Lagrange s'écrivent alors,

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

pour lesquelles il faudra spécifier les fonctions scalaires L et ϕ .

Exemple

Soit une particule se déplaçant dans un fluide, dans le champ de pesanteur terrestre. La force de frottement est supposée proportionnelle à la vitesse, par conséquent la fonction de dissipation a pour expression :

$$\phi = \frac{1}{2} \mu (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

En prenant le zéro de l'énergie potentielle au fond du fluide, le Lagrangien s'écrit,

$$L = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

Les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial \dot{x}} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial y} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial \dot{y}} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} + \mu\dot{x} = 0 \\ m\ddot{y} + mg + \mu\dot{y} = 0 \end{cases}$$

4- Forces de contraintes généralisées

Soit un système à n degrés de liberté, donc à n coordonnées indépendantes, dont toutes les liaisons sont holonomes. L'emploi des coordonnées généralisées fait

disparaître les forces de liaison. Cependant, on peut ne pas les utiliser et conserver $n + k$ coordonnées q_i non indépendantes, et trouver l'expression des forces de liaison.

Les k équations de liaison holonomes sont telles que :

$$\forall \alpha = 1, \dots, k \quad f^\alpha(q_1, \dots, q_{n+k}, t) = 0 \quad (2.14)$$

Imaginons un déplacement virtuel du système, donc à temps constant. Si ce déplacement virtuel est compatible avec les liaisons, alors l'équation de liaison est encore valable dans cette nouvelle position :

$$\forall \alpha = 1, \dots, k \quad f^\alpha(q_1 + \delta q_1, \dots, q_{n+k} + \delta q_{n+k}, t) = 0 \quad (2.15)$$

Où t ne varie pas. La différence entre (2.14) et (2.15) est nulle :

$$\forall \alpha = 1, \dots, k \quad f^\alpha(q_1 + \delta q_1, \dots, q_{n+k} + \delta q_{n+k}, t) - f^\alpha(q_1, \dots, q_{n+k}, t) = 0$$

$$\forall \alpha = 1, \dots, k \quad \delta_t f^\alpha(q_1, \dots, q_{n+k}, t) = 0$$

qui est la variation à temps constant de chaque f^α , et qui s'écrit :

$$\forall \alpha = 1, \dots, k \quad \sum_{i=1}^{n+k} \frac{\partial f^\alpha}{\partial q_i} \delta q_i = 0 \quad (2.16)$$

Appelées forces de contraintes instantanées.

A partir de l'équation (2.4), l'équation de la dynamique valable pour tous types de contraintes et de coordonnées s'écrit,

$$\sum_{i=1}^{n+k} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \right) + \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}^\alpha \left(\frac{\partial \vec{r}^\alpha}{\partial q_i} \right)_t \right] \delta q_i = 0$$

Où les δq_i ne sont pas indépendants. On suppose sans perte de généralité, que ce sont les n premières coordonnées q_i qui sont indépendantes.

Les coefficients devant les n premiers δq_i sont donc nuls :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \right) + \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}^\alpha \left(\frac{\partial \vec{r}^\alpha}{\partial q_i} \right)_t = 0$$

Les forces sont au maximum au nombre de n , une force (une composante) par degré de liberté. Ajouter des coordonnées superflues n'ajoute pas de forces. On suppose donc à nouveau sans perte de généralité que ces forces s'expriment en fonction des n premières coordonnées, supposées indépendantes (voir la remarque dans l'exemple [ci-dessous](#)).

On retrouve alors les forces généralisées Q_i , et l'on a :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \right) - Q_i = 0$$

Si bien qu'il reste :

$$\sum_{i=n+1}^{n+k} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \right) \right] \delta q_i = 0 \quad (2.17)$$

Les n premières coordonnées étant supposées indépendantes, les n premiers δq_i dans la relation (2.16) sont indépendants, et leurs coefficients respectifs sont nuls afin que la somme soit nulle :

$$\forall \alpha = 1, \dots, k \quad i = 1, \dots, n \quad \frac{\partial f^\alpha}{\partial q_i} = 0 \quad (2.18)$$

Les équations de liaison ne sont donc pas des fonctions explicites des n premières coordonnées. Il reste :

$$\forall \alpha = 1, \dots, k \quad \sum_{i=n+1}^{n+k} \frac{\partial f^\alpha}{\partial q_i} \delta q_i = 0 \quad (2.19)$$

En introduisant k multiplicateurs indéterminés λ_α entre l'équation (2.17) et les k équations (2.19), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sum_{i=n+1}^{n+k} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \right) \right] \delta q_i &= \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \sum_{i=n+1}^{n+k} \frac{\partial f^\alpha}{\partial q_i} \delta q_i \\ \sum_{i=n+1}^{n+k} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \right) - \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \frac{\partial f^\alpha}{\partial q_i} \right] \delta q_i &= 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Les conditions sur les multiplicateurs λ_α pour que chacun des k termes soit nul sont les suivantes :

$$\forall i = n+1, \dots, n+k \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \right) - \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \frac{\partial f^\alpha}{\partial q_i} = 0 \quad (2.21)$$

Les équations de la dynamique sont données par le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} \forall i = 1, \dots, n & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \right) - Q_i = 0 \\ \forall i = n+1, \dots, n+k & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \right) - \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \frac{\partial f^\alpha}{\partial q_i} = 0 \end{cases}$$

La relation (2.18) permet d'écrire ce système d'équations en une seule équation ayant un indice i allant de 1 à $n+k$.

$$\forall i = 1, \dots, n+k \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \right) - Q_i - \sum_{\alpha=1}^k \lambda_\alpha \frac{\partial f^\alpha}{\partial q_i} = 0 \quad (2.22)$$

Cette équation montre que les $\lambda \partial_q f$ sont homogènes à des forces généralisées. On les appelle forces de contraintes généralisées.

Lorsque toutes les forces dérivent d'une énergie potentielle indépendante des vitesses généralisées,

$$\sum_{\alpha=1}^N \vec{F}^\alpha \left(\frac{\partial \vec{r}^\alpha}{\partial q_i} \right) = - \frac{\partial V(q, t)}{\partial q_i} \quad (2.23)$$

on peut ajouter le terme nul $\frac{\partial V(q,t)}{\partial \dot{q}_i}$, et en utilisant la définition du Lagrangien $L = T - V$, nous avons :

$$\forall i = 1, \dots, n + k \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) - \sum_{\alpha=1}^k \lambda_{\alpha} \frac{\partial f^{\alpha}}{\partial q_i} = 0 \quad (2.24)$$

Exemple. Un cylindre de masse m et de rayon r , roule sans glisser sur un plan incliné d'un angle α . Quelle est l'équation de son mouvement ?

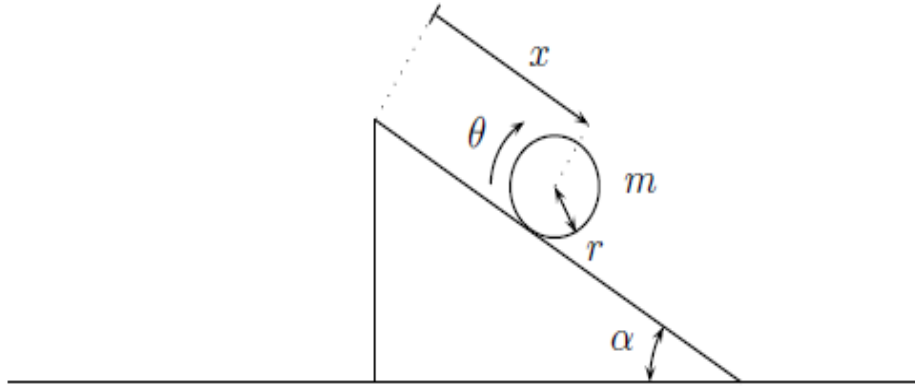


Figure 2. 3 : Cylindre roulant sur un plan incliné

Soit θ l'angle de rotation du cylindre. Sans glissement, la distance sur le cylindre $r\theta$ est égale à celle parcourue x . La condition de roulement sans glissement s'écrit donc,

$$r\theta - x = 0 \quad (2.25)$$

La liaison est de la forme,

$$f(x, \theta) = 0$$

Avec

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -1 \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} = r \end{cases}$$

En choisissant $x - r\theta = 0$ les signes seraient inversés. Il n'y a qu'un seul degré de liberté, mais nous utilisons les deux coordonnées x et θ reliées par l'équation de contrainte (2.25). L'expression de l'énergie cinétique comporte un terme en translation et un terme en rotation,

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$$

dans laquelle on conserve les deux variables x et θ . En choisissant l'origine de l'énergie potentielle au sommet du plan incliné, le Lagrangien s'écrit :

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + mgx \sin \alpha$$

Remarque : On peut aussi choisir indifféremment de prendre :

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + mgr \theta \sin \alpha$$

Les équations de Lagrange s'écrivent,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x} \right) = \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right) = \lambda \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \begin{cases} \frac{d}{dt} (m \dot{x}) - mgr \sin \alpha = -\lambda \\ \frac{d}{dt} (J \dot{\theta}) = \lambda r \end{cases} \\ \begin{cases} m \ddot{x} - mgr \sin \alpha + \lambda = 0 \\ \lambda = \frac{J \ddot{\theta}}{r} \end{cases} \end{cases}$$

L'équation de liaison (2.25) donne,

$$\begin{aligned} r \theta &= x \\ r \ddot{\theta} &= \ddot{x} \end{aligned}$$

D'où $\lambda = J \frac{\ddot{x}}{r^2}$;

$$\begin{cases} m \ddot{x} - mgr \sin \alpha + J \frac{\ddot{x}}{r^2} = 0 \\ \frac{mr^2 \lambda}{J} - mgr \sin \alpha + \lambda = 0 \\ \begin{cases} \ddot{x} (mr^2 + J) - mr^2 g \sin \alpha = 0 \\ \lambda (mr^2 + J) - mJ g \sin \alpha = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \ddot{x} - \frac{mr^2}{mr^2 + J} g \sin \alpha = 0 \\ \lambda = \frac{J}{mr^2 + J} m g \sin \alpha \end{cases} \end{cases}$$

Pour un cylindre plein, de longueur l, le moment d'inertie s'écrit,

$$J = \iiint_V r^2 dm = \rho \int_0^r r^2 2\pi r l dr = \frac{1}{2} \rho \pi r^4 l = \frac{1}{2} m r^2$$

et l'on obtient,

$$\begin{cases} \ddot{x} - \frac{2}{3} g \sin \alpha = 0 \\ \lambda = \frac{1}{3} m g \sin \alpha \end{cases}$$

Les forces de contraintes généralisées s'écrivent,

$$\begin{cases} f_x = \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \\ f_\theta = \lambda \frac{\partial f}{\partial \theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_x = -\frac{1}{3} mgsin\alpha \\ f_\theta = \frac{1}{3} rmgsin\alpha \end{cases}$$

f_x est la force de frottement sur la ligne de contact du cylindre avec le plan incliné.

f_θ est le moment de cette force de frottement par rapport à l'axe du cylindre, qui provoque la rotation du cylindre sans glissement.

Pour un cylindre creux, de longueur l, le moment d'inertie s'écrit,

$$J = r^2 \iiint_V dm = m r^2$$

et l'on obtient,

$$\begin{cases} \ddot{x} - \frac{1}{2} gsin\alpha = 0 \\ \lambda = \frac{1}{2} mgsin\alpha \end{cases}$$

Les forces de contraintes généralisées s'écrivent,

$$\begin{cases} f_x = -\frac{1}{2} mgsin\alpha \\ f_\theta = \frac{1}{2} rmgsin\alpha \end{cases}$$

On vérifie que l'on obtient le même résultat en utilisant directement l'équation de contrainte dans l'expression de l'énergie cinétique. Par exemple pour le cylindre plein :

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{4} mr^2 \dot{\theta}^2 = \frac{3}{4} m\dot{x}^2$$

Le Lagrangien s'écrit : $L = \frac{3}{4} m\dot{x}^2 - mgxsin\alpha$

L'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x} \right) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{3}{2} m\dot{x} \right) - mgsin\alpha = 0$$

$$\ddot{x} - \frac{2}{3} gsin\alpha = 0$$

5. Liaison non-holonomes

Lorsque les liaisons sont non-holonomes il n'existe pas de méthode générale pour éliminer les coordonnées superflues. Cependant, dans le cas particulier où elles sont

données sous forme différentielle non intégrable, on peut éliminer les équations de la dynamique dépendantes grâce aux multiplicateurs indéterminés de Lagrange.

Considérons un système à $n + k$ coordonnées dépendantes, dont les k liaisons non-holonomes sont données sous la forme :

$$\forall \alpha = 1, \dots, k \quad \sum_{i=1}^{n+k} a_{i\alpha} \delta q_i + a_{it} dt = 0 \quad (2.26)$$

Ces équations différentielles sont supposées non intégrables, car sinon on se ramènerait au cas de liaisons holonomes. Par exemple, la condition de roulement sans glissement de l'exemple 3.5 est intégrable. Qu'il y ait glissement ou non, la vitesse d'un point quelconque du cylindre est la composition vectorielle d'une vitesse de rotation autour de l'axe du cylindre, et de la vitesse en translation du cylindre. En l'absence de glissement, la vitesse en rotation et la vitesse en translation des points au contact du plan incliné sont égales en norme (et en direction, mais de sens opposé) :

$$r\dot{\theta} = \dot{x}$$

Cette liaison s'écrit sous forme différentielle,

$$r d\theta - dx = 0$$

Les coefficients a_{ij} et a_{it} s'écrivent donc (une seule liaison donc $k = 1$) :

$$\begin{cases} a_{\theta} = r \\ a_x = -1 \\ a_t = 0 \end{cases}$$

Elle s'intègre en une équation holonome,

$$r\theta - x = 0$$

Où la constante d'intégration est choisie nulle. Pour le cas des équations différentielles non intégrables, les déplacements virtuels ayant lieu à temps constant, nous avons,

$$\forall \alpha = 1, \dots, k \quad \sum_{i=1}^{n+k} a_{i\alpha} \delta q_i = 0 \quad (2.27)$$

Par analogie avec le paragraphe précédent, en introduisant k multiplicateurs de Lagrange, les $n + k$ équations de la dynamique s'écrivent :

$$\forall i = 1, \dots, n + k \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \right) - Q_i - \sum_{\alpha=1}^k \lambda_{\alpha} a_{i\alpha} = 0 \quad (2.28)$$

Lorsque toutes les forces dérivent d'une énergie potentielle indépendante des vitesses généralisées, nous avons :

$$\forall i = 1, \dots, n + k \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) - \sum_{\alpha=1}^k \lambda_{\alpha} a_{i\alpha} = 0 \quad (2.29)$$

II- Propriétés du Lagrangien et des équations de Lagrange

1- Changement d'unités

Multiplions le Lagrangien par une constante λ , nous avons :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \lambda L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial \lambda L}{\partial q_i} \right) = 0$$

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = 0$$

Les équations du mouvement sont invariantes lorsque le Lagrangien est multiplié par une constante, ce qui correspond à un changement d'unités.

2. Caractère scalaire du Lagrangien

Les quantités considérées sont toutes des scalaires, et non plus des vecteurs comme en mécanique de Newton. La mécanique analytique exploite directement le fait que la plupart des forces en physique dérivent d'une énergie potentielle,

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$$

$$\text{rot} \vec{F} = -\text{rot} \overrightarrow{\text{grad}} V = 0$$

Soit

$$\partial_y F_z(x, y, z) - \partial_z F_y(x, y, z) = 0$$

$$\partial_z F_x(x, y, z) - \partial_x F_z(x, y, z) = 0$$

$$\partial_x F_y(x, y, z) - \partial_y F_x(x, y, z) = 0$$

Les trois composantes de la force $\mathbf{F}$ sont reliées entre-elles par trois équations, ce qui explique pourquoi on peut les remplacer par l'unique scalaire V .

3. Additivité du Lagrangien.

Soient deux systèmes physiques indépendants, d'énergies cinétiques respectives T_1 et T_2 , et d'énergies potentielles respectives V_1 et V_2 . Pour le système global nous avons :

$$T = T_1 + T_2$$

$$V = V_1 + V_2$$

$$T - V = (T_1 + T_2) - (V_1 + V_2) = (T_1 - V_1) + (T_2 - V_2)$$

$$L = L_1 + L_2$$

La fonction de Lagrange est donc additive.

4. Invariance de jauge du Lagrangien.

Le Lagrangien est défini à la dérivée totale par rapport au temps d'une fonction f des n coordonnées généralisées q_i et du temps près. Autrement dit, le Lagrangien,

$$L' = L + \frac{df(q, t)}{dt} \quad (2. 30)$$

Donne les mêmes équations du mouvement que le Lagrangien L.

Montrons que $\forall i = 1, \dots, n$:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left[\frac{df(q, t)}{dt} \right] \right\} - \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\frac{df(q, t)}{dt} \right] = 0 \quad ?$$

En effet,

Ecrivons la différentielle de $\partial f / \partial q_i$ puis sa dérivée totale par rapport au temps :

$$\begin{aligned} d \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \right) &= \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial}{\partial q_{\alpha}} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \right) dq_{\alpha} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \right) dt = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial q_{\alpha} \partial q_i} dq_{\alpha} + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_i} dt \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \right) &= \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial q_{\alpha} \partial q_i} \dot{q}_{\alpha} + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_i} \end{aligned}$$

Soit donc $\forall \alpha = 1, \dots, n$,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \right) = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left[\sum_{\alpha=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \right] \right\}$$

On écrit donc :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left[\sum_{\alpha=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \right] \right\} &= \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial q_{\alpha} \partial q_i} \dot{q}_{\alpha} + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_i} \\ \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left[\sum_{\alpha=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \right] \right\} &= \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} + \frac{\partial f}{\partial t} \right] \quad (2.31) \end{aligned}$$

Ecrivons la dérivée totale par rapport au temps de f :

$$\begin{aligned} df &= \sum_{\alpha=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_{\alpha}} dq_{\alpha} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} dt \\ \frac{df}{dt} &= \sum_{\alpha=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned}$$

On écrit (2.31) comme suit :

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left[\frac{df(q, t)}{dt} \right] \right\} - \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\frac{df(q, t)}{dt} \right] = 0$$

Alors : La fonction $f(q, t)$ constitue une jauge pour le Lagrangien, qui est dit invariant de jauge.

5. Covariance des équations de Lagrange par changement de coordonnées.

Lorsque nous avons établi les équations de Lagrange (2.4), nous n'avons pas fait d'hypothèse sur le système de coordonnées utilisé. Par conséquent, quel que soit ce système de coordonnées nous trouverons les équations de Lagrange. Les équations de Lagrange sont invariantes de forme par changement de coordonnées.

Comparaison avec les équations de Newton.

Contrairement aux équations de Lagrange, les équations de Newton ne sont pas covariantes par changement de coordonnées. En effet, soit une particule soumise à une force dérivant d'une énergie potentielle V , les équations de Newton de la dynamique en coordonnées cartésiennes (x, y) s'écrivent :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = - \frac{\partial V(x, y)}{\partial x} \\ m\ddot{y} = - \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} \end{cases}$$

Mais, en passant en coordonnées polaires (ρ, θ) :

$$\begin{cases} m\ddot{\rho} \neq - \frac{\partial V(\rho, \theta)}{\partial \rho} \\ m\ddot{\theta} \neq - \frac{\partial V(\rho, \theta)}{\partial \theta} \end{cases}$$

6- Invariance du Lagrangien par changement de référentiel galiléen

Un référentiel est caractérisé par son mouvement relatif aux autres référentiels.

On lui associe une mesure du temps et un repère dans l'espace. Ainsi, deux référentiels se distinguent par leur mouvement relatif, et non par les repères auxquels on les a associés.

Les référentiels dans lesquels il n'y a pas de forces fictives sont dits galiléens ou inertiels. En l'absence de champs de gravitation, les référentiels inertiels se déplacent à vecteur vitesse relative constante les uns par rapport aux autres.

Soit $\mathbf{u}$ la vitesse relative constante entre deux référentiels galiléens. On note $\mathbf{v}$ la vitesse d'une particule dans le premier référentiel et $\mathbf{v}'$ sa vitesse dans le second.

Alors :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{u} \quad (2. 32)$$

Dans le premier référentiel, le Lagrangien a pour expression,

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - V$$

et dans le second,

$$L' = \frac{1}{2}mv'^2 - V'$$

En utilisant les relations (2. 32) et (2. 35) :

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}mv^2 - V = \frac{1}{2}m\vec{v} \cdot \vec{v} - V = \frac{1}{2}m(\vec{v}' + \vec{u}) \cdot (\vec{v}' + \vec{u}) - V \\ &= \frac{1}{2}mv'^2 + m\vec{v}' \cdot \vec{u} + \frac{1}{2}mu^2 - V' \end{aligned}$$

En se rappelant que la vitesse relative $\mathbf{u}$ est constante, $du/dt = 0$:

$$L = \frac{1}{2}mv'^2 - V' + m \frac{d}{dt}(\vec{r}' \cdot \vec{u}) + \frac{1}{2}m \frac{d}{dt}(u^2 t)$$

Les deux derniers termes sont des dérivées totales par rapport au temps de fonctions des coordonnées et du temps. En utilisant l'invariance de jauge du Lagrangien du paragraphe 4, nous pouvons les supprimer,

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2}m\mathbf{v}'^2 - V' = \mathbf{L}' \quad (2. 33)$$

et le Lagrangien est invariant par changement de référentiel galiléen.

7- Covariance des équations de Lagrange par changement de référentiel galiléen

Considérons deux référentiels galiléens R et R' de vecteur vitesse relative constant $\mathbf{u}$. Supposons que l'axe Ox' du second glisse sur l'axe Ox du premier, les axes Oy' et Oz' restant respectivement parallèles aux axes Oy et Oz . Si (x, y, z, t) et (x', y', z', t') désignent les coordonnées et le temps d'un même évènement par rapport à chacun des référentiels galiléens, la transformation de Galilée s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{u}t \\ \mathbf{y}' = \mathbf{y} \\ \mathbf{z}' = \mathbf{z} \\ \mathbf{t}' = \mathbf{t} \end{cases} \quad (2. 34)$$

D'après la relation (2. 33),

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{t}) &= \mathbf{L}'(\mathbf{x}', \mathbf{v}', \mathbf{t}') \\ d\mathbf{L}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{t}) &= d\mathbf{L}'(\mathbf{x}', \mathbf{v}', \mathbf{t}') \\ \frac{\partial L}{\partial x} dx + \frac{\partial L}{\partial v} dv + \frac{\partial L}{\partial t} dt &= \frac{\partial L'}{\partial x'} dx' + \frac{\partial L'}{\partial v'} dv' + \frac{\partial L'}{\partial t'} dt' \end{aligned}$$

En différentiant la transformation de Galilée :

$$\begin{aligned} d\mathbf{t}' &= d\mathbf{t} \\ d\mathbf{x}' &= d\mathbf{x} - \mathbf{u}d\mathbf{t} \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= \mathbf{v} - \mathbf{u} \\ d\mathbf{v}' &= d\mathbf{v} \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{\partial L}{\partial x} dx + \frac{\partial L}{\partial v} dv + \frac{\partial L}{\partial t} dt = \frac{\partial L'}{\partial x'} dx - \frac{\partial L'}{\partial x'} u dt + \frac{\partial L'}{\partial v'} dv + \frac{\partial L'}{\partial t'} dt$$

Par identification,

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L'}{\partial x'} \\ \frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial L'}{\partial v'} \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial v'} \right) - \left(\frac{\partial L'}{\partial x'} \right)$$

La nullité des équations de Lagrange dans un référentiel galiléen entraîne la nullité des équations de Lagrange dans tout autre référentiel galiléen. Les équations de Lagrange sont donc invariantes de forme par changement de référentiel galiléen.

Comparaison avec les équations de Newton.

Montrons que les équations de Newton sont également covariantes sous le groupe de transformation de Galilée. La masse est indépendante de la vitesse, donc $m' = m$. L'accélération est invariante par changement de référentiel galiléen, en effet :

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{u}t$$

$$\dot{\mathbf{x}}' = \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{u}$$

$$\ddot{\mathbf{x}}' = \ddot{\mathbf{x}}$$

donc $\gamma' = \gamma$. Les modèles de forces sont aussi invariants par changement de référentiels galiléens (le modèle de force d'un ressort ne dépend pas de la vitesse du référentiel dans lequel on mène l'expérience), et l'on a $\sum F' = \sum F$. Si bien que la relation fondamentale de la dynamique s'écrit dans le nouveau référentiel :

$$\sum F = m'\gamma'$$

Elle est donc invariante de forme par transformation de Galilée. Aucune expérience de mécanique effectuée dans un référentiel galiléen ne peut mettre en évidence le mouvement de ce référentiel. C'est le principe de relativité newtonien.

L'invariance du modèle de force F implique l'invariance de l'énergie potentielle V dont elle dérive :

$$\begin{aligned} F' &= F \\ -\text{grad}V' &= -\text{grad}V \\ V' &= V \end{aligned} \quad (2. \quad 35)$$

III- Intégrales premières du mouvement

Les intégrales premières sont des fonctions des coordonnées généralisées q_i et des vitesses généralisées $\dot{q}_i$, qui se conservent au cours du mouvement. Une intégrale première est donc de la forme :

$$f(q, \dot{q}) = \text{Cste}$$

Ces équations différentielles sont du premier ordre par rapport aux variables q_i , et non plus du second ordre comme le sont les équations du mouvement. Ces dernières sont intégrées une première fois.

La résolution de l'équation du mouvement d'un système mécanique ayant n degrés de liberté nécessite n conditions initiales sur les coordonnées et n sur les vitesses,

soit $2n$ constantes. Les coordonnées généralisées et les vitesses généralisées sont des fonctions du temps et de ces constantes :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad q_i = q_i(t, q_1^0, \dots, q_n^0, \dot{q}_1^0, \dots, \dot{q}_n^0)$$

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \dot{q}_i = \dot{q}_i(t, q_1^0, \dots, q_n^0, \dot{q}_1^0, \dots, \dot{q}_n^0)$$

Par exemple, nous avons trouvé $q(t) = \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2 + \dot{q}_0 t + q_0$. Il est toujours possible d'effectuer une translation dans le temps, qui correspond à un changement d'origine du temps :

$$\tau = t + t_0$$

Cela permet de supprimer l'une des constantes (voir l'exemple 3.7), constantes que l'on note C dans ce qui suit :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad q_i = q_i(\tau, C_1, \dots, C_{2n-1})$$

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \dot{q}_i = \dot{q}_i(\tau, C_1, \dots, C_{2n-1})$$

En inversant ces relations, nous avons :

$$\forall i = 1, \dots, 2n-1 \quad C_i = C_i(q, \dot{q})$$

Nous pouvons par conséquent former au plus $2n-1$ intégrales premières du mouvement pour un système à n degrés de liberté. Cependant, toutes les intégrales sont loin de jouer un rôle d'égale importance en mécanique

Exemple 3.6. Masse glissant sans frottements sur un plan incliné Une masse m glisse sans frottements sur un plan incliné.

Quelle est l'équation de son mouvement ?

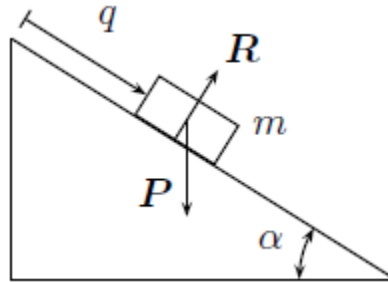


Figure 2. 4 : Masse glissant sans frottements sur un plan incliné

Pour $n = 1$ degré de liberté, il y a $2n - 1 = 1$ intégrale première. La force de pesanteur, seule force extérieure, dérive d'une énergie potentielle, donc l'énergie mécanique est une intégrale première. Elle nous fournira une équation, pour une variable, donc la solution $q(t)$.

En prenant l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur au sommet du plan incliné, l'énergie mécanique s'écrit,

$$E = T + V = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - mgq \sin \alpha = Cste$$

Soit,

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{q}^2 - mgq \sin \alpha \right) &= 0 \\ m \dot{q} \ddot{q} - mg \dot{q} \sin \alpha &= 0 \\ \ddot{q} - g \sin \alpha &= 0\end{aligned}$$

Exemple : Pendule simple, plan

L'équation différentielle de l'élongation $\theta(t)$ du pendule simple de longueur ρ est la suivante:

$$\rho \ddot{\theta} + g \sin \theta = 0$$

Dans l'approximation des petites oscillations, on utilise le développement limité de la fonction sinus à l'ordre un, $\sin \theta \approx \theta$. L'équation devient :

$$\rho \ddot{\theta} + g \theta = 0$$

La solution de cette équation différentielle linéaire du second ordre est de forme sinusoïdale, fonction sinus ou cosinus au choix, la phase à l'origine des temps φ_0 permettant de passer d'une fonction à l'autre :

$$\begin{aligned}\theta(t) &= A \sin(\omega t + \varphi_0) \\ \dot{\theta}(t) &= A \omega \cos(\omega t + \varphi_0) \\ \ddot{\theta}(t) &= -A \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0)\end{aligned}$$

Où $\varphi = \omega t + \varphi_0$ est la phase du mouvement oscillatoire. En remplaçant dans l'équation différentielle, on trouve l'expression de la pulsation propre,

$$-\rho A \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) + g A \sin(\omega t + \varphi_0) = 0$$

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{g}{\rho}}$$

Pour laquelle on ne conserve que la valeur positive. L'amplitude (élongation maximale) A et la phase à l'origine des temps φ_0 sont les deux constantes de ce système à un degré de liberté :

$$\begin{cases} \theta = \theta(t, A, \varphi_0) \\ \dot{\theta} = \dot{\theta}(t, A, \varphi_0) \end{cases}$$

En posant $\varphi_0 = \omega_0 t$

$$\begin{cases} \theta = A \sin(\omega t + \omega t_0) \\ \dot{\theta} = A \omega \cos(\omega t + \omega t_0) \end{cases}$$

puis $\tau = t + t_0$,

$$\begin{cases} \theta = A \sin(\omega \tau) \\ \dot{\theta} = A \omega \cos(\omega \tau) \end{cases}$$

nous supprimons la constante φ_0 . A l'instant initial $\tau = 0$,

$$\begin{cases} \theta_0 = A \\ \dot{\theta}_0 = 0 \end{cases}$$

et l'on a :

$$\theta(\tau) = \theta_0 \sin(\omega\tau)$$

A un facteur près, l'intégrale première A n'est autre que l'énergie mécanique.

En effet, en prenant l'origine de l'énergie potentielle au point le plus bas de la trajectoire :

$$E = \frac{1}{2} m \rho^2 \dot{\theta}^2 + m g \rho (1 - \cos \theta)$$

Pour de petites oscillations $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$:

$$E \approx \frac{1}{2} m \rho^2 \dot{\theta}^2 + m g \rho \left(\frac{1}{2} \theta^2 \right)$$

Relation valable en particulier à l'instant initial :

$$E \approx \frac{1}{2} m g \rho A^2$$

1- Fonction énergie.

Dans le cas général, le Lagrangien dépend des coordonnées généralisées, des vitesses généralisées et du temps explicitement, $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$:

$$dL(q, \dot{q}, t) = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) dq_i + \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i + \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}$$

En utilisant les équations de Lagrange,

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t}$$

si bien que,

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = - \frac{\partial L}{\partial t}$$

Définition : Fonction énergie

On définit la fonction énergie par :

$$h(q, \dot{q}, t) = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L$$

Nous avons alors :

$$\frac{dh}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial t}$$

Lorsque le Lagrangien ne dépend pas explicitement du temps,

$$\frac{d}{dt}h(q, \dot{q}) = 0$$

$$h(q, \dot{q}) = Cste$$

et la fonction énergie se conserve au cours du mouvement.

Exemple : Masse glissant sans frottements sur un plan incliné

Une masse m glisse sans frottements sur un plan incliné. Quelle est l'équation de son mouvement ?

Le Lagrangien a pour expression :

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + mgq \sin\alpha$$

Il ne dépend pas explicitement du temps, donc la fonction énergie se conserve :

$$h = \dot{q} \frac{dL}{d\dot{q}} - L = m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - mgq \sin\alpha = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - mgq \sin\alpha = Cste$$

Nous retrouvons l'intégrale première de l'énergie mécanique de l'exemple 3.6.

2. coordonnées cycliques

Définition : Coordonnées cycliques

Une coordonnée généralisée q_i qui n'apparaît pas explicitement dans le Lagrangien (mais dont la dérivée par rapport au temps apparaît), est dite cyclique ou ignorable :

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Soit q_i une coordonnée cyclique, en partant de l'équation de Lagrange pour cette variable,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = Cste$$

$\partial_{\dot{q}_i} L$ est donc une intégrale première du mouvement.

Exemple :

En coordonnées cartésiennes, si la coordonnée x est cyclique :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = Cste$$

Si de plus l'énergie potentielle ne dépend pas de la vitesse :

$$\frac{\partial}{\partial v_x}(T - V) = \frac{1}{2}m \frac{\partial v_x^2}{\partial v_x} = mv_x$$

Notez que mv_x est bien du premier ordre par rapport à la variable x .

Par suite, $m\mathbf{v}_x$ étant l'impulsion selon l'axe des x, notée $\mathbf{p}_x$, nous posons la définition suivante :

Définition : Impulsions généralisées

Les dérivées partielles du Lagrangien par rapport aux vitesses généralisées,

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Sont appelées impulsions généralisées.

L'impulsion généralisée est à la base de la mécanique de Hamilton.