

Chapitre 1- Fondement de la mécanique analytique

Partie N°2 -Principe des travaux virtuels (PTV)

Principe des puissances virtuelles (PPV)

Cette méthode des *travaux virtuels* est l'origine de la formulation lagrangienne de la mécanique, Elle s'appuie sur la notion de *déplacement virtuel* (noté $D.V.$). Elle présente l'avantage de ne pas exiger le calcul de toutes les réactions entre les différentes parties des systèmes considérés et donc d'être plus efficace.

Différentielles virtuelles

Soit une fonction $f(q_i, t)$ de $n + 1$ variables : $q_1, q_2, \dots, q_n, t$, sa différentielle réelle est:

$$df = \sum_1^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} dq_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

où dq_i et dt sont les différentielles des q_i et t .

Par définition, La différentielle virtuelle de f à l'instant t est donnée par l'expression :

$$df^* = \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial q_i} dq_i^*$$

par rapport à l'expression précédente, le temps est « figé », $dt = 0$.

Exemple:

$$f(x, \varphi, t) = x \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\Rightarrow df = \sin(\omega t + \varphi) dx + x \cos(\omega t + \varphi) (d\varphi + \omega dt)$$

$$\Rightarrow df^* = \sin(\omega t + \varphi) dx^* + x \cos(\omega t + \varphi) d\varphi^*$$

Dérivée virtuelle

Soit une fonction de $n + 1$ variables $q_1, q_2, \dots, q_n, t$: $f(q_i, t)$ sa dérivée réelle est :

$$f' = \sum_1^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} q_i' \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Par définition, La **dérivée virtuelle** de f à l'instant t figé est donnée par l'expression :

$$f'^* = \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial q_i} q_i'^*$$

Exemple:

$$f(x, \varphi, t) = x \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\Rightarrow f' = x' \sin(\omega t + \varphi) + (\varphi' + \omega) x \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\Rightarrow f'^* = x'^* \sin(\omega t + \varphi) + \varphi'^* x \cos(\omega t + \varphi)$$

Déplacement réel

La position d'un point M est définie par son vecteur position $\overrightarrow{OM}(x, t)$.

Pour un déplacement élémentaire (infinitésimal) du point M; sa différentielle réelle s'écrit:

$$d\overrightarrow{OM}(x, t) = \sum_1^n \left(\frac{\partial \overrightarrow{OM}(x, t)}{\partial x_i} dx_i \right) + \frac{\partial \overrightarrow{OM}(x, t)}{\partial t} dt$$

Plus généralement

Un mouvement réel est déterminé par toutes les variations infinitésimales dans le temps des différentes coordonnées généralisées :

$$d\overrightarrow{r}^\alpha = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \overrightarrow{r}^\alpha}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \overrightarrow{r}^\alpha}{\partial t} dt$$

Ceci est un **déplacement réel**, où on a besoin de suivre la variation de la masse dans le temps.

Déplacement virtuel

on peut associer un déplacement virtuel du point M à sa différentielle virtuelle

$$d\overrightarrow{OM}^* = \sum_1^n \left(\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial x_i} dx_i^* \right) = \delta \overrightarrow{M}$$

Le déplacement virtuel est généralement noté : $\delta \overrightarrow{M}$

Plus généralement

Le déplacement virtuel c'est tous les déplacements géométriques possibles du système à un **instant fixe t** :

$$d\overrightarrow{r}^{\alpha*} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \overrightarrow{r}^{\alpha}}{\partial q_i} \delta q_i = \delta \overrightarrow{r}^{\alpha} \quad (\delta t = 0)$$

Un **déplacement virtuel** est un déplacement infinitésimal **atemporel** (théorique et non physique) qui ne nécessite pas le temps.

Un **déplacement virtuel** est un **concept mathématique** qui décrit le passage d'une configuration d'équilibre à une autre configuration d'équilibre sans pour autant considérer le temps de passage: c'est un déplacement dans l'espace de configuration.

Déplacement virtuel

Le déplacement virtuel (infinitésimal): c'est la modification de la configuration du système résultant d'un changement infinitésimal arbitraire des coordonnées $\delta \vec{r}^\alpha$, cohérent avec les forces et contraintes imposées au système à un instant donné t .

Le déplacement virtuel est dit compatible avec les contraintes quand la position du système passe de $\{q_i ; i = 1, \dots, n\}$ à $\{q_i + \delta q_i ; i = 1, \dots, n\}$:

$$d\vec{r}^{\alpha*} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}^\alpha}{\partial q_i} \delta q_i = \delta \vec{r}^\alpha$$

$\frac{\partial \vec{r}^\alpha}{\partial q_i}$: dérivée partielle de $\vec{r}_\alpha$ par rapport à q_i (tous les autres q_j fixes)

$\frac{\partial \vec{r}^\alpha}{\partial q_i} \delta q_i$: déplacement causé par la variation δq_i de q_i .

Vitesse réels & vitesse virtuelle

Vitesse réelle

On considère un système constitué de N points matériels et ayant n degrés de liberté et soient $q_i(t)$; $i = 1, \dots, n$, les équations horaires du mouvement du système.

La vitesse réelle d'un système mécanique s'écrit :

$$\vec{V}(M) = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_1^n \frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial t}$$

Vitesse virtuelle

La vitesse virtuelle d'un système mécanique s'écrit:

$$\vec{V}^* = \sum_1^n \frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial q_i} \dot{q}_i^*$$

On appelle par champ de vitesses virtuelles d'un système matériel, le relevé des vitesses de ce système à cet instant.

Vitesses virtuelles compatibles avec les liaisons

- ▶ Les liaisons holonomes peuvent s'écrire sous la forme suivante:

$$\frac{\partial F_{\alpha}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \dots + \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial t} = 0 \quad \alpha = 1, \dots, h$$

- ▶ Les liaisons non holonomes peuvent s'écrire sous la forme suivante:

$$a_{\alpha 1} \dot{q}_1 + \dots + a_{\alpha i} \dot{q}_i + \dots + a_{\alpha n} \dot{q}_n + b_{\alpha} = 0 \quad \alpha = 1, \dots, l$$

- ▶ On appelle **vitesses virtuelles compatibles** avec les liaisons les $\dot{q}_i^*$ qui vérifient les équations précédentes. Sachant que les vitesses virtuelles sont indépendantes du temps t on aura alors:

 C.V.V compatible avec les liaisons holonomes:

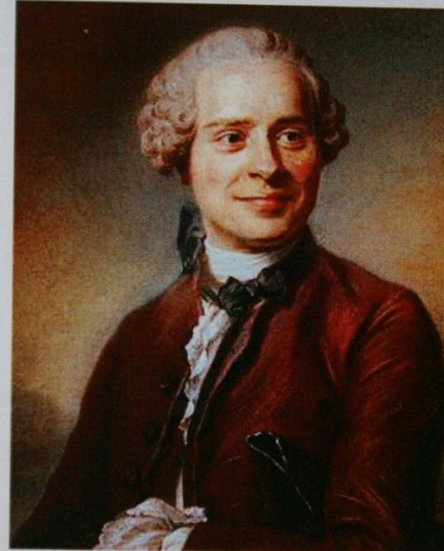
$$\frac{\partial F_{\alpha}}{\partial q_1} \dot{q}_1^* + \dots + \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial q_i} \dot{q}_i^* + \dots + \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial q_n} \dot{q}_n^* = 0 \quad \alpha = 1, \dots, h$$

 C.V.V compatible avec les liaisons non holonomes:

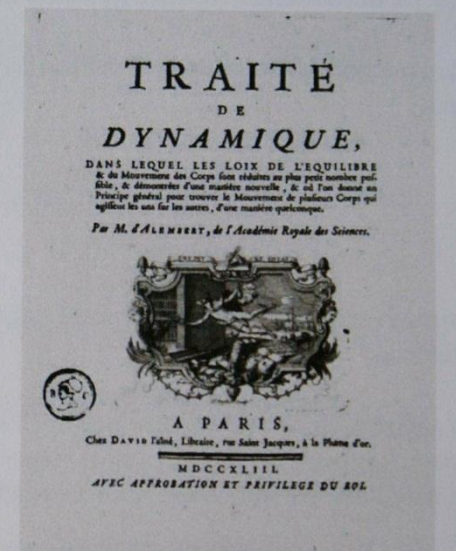
$$a_{\alpha 1} \dot{q}_1^* + \dots + a_{\alpha i} \dot{q}_i^* + \dots + a_{\alpha n} \dot{q}_n^* = 0 \quad \alpha = 1, \dots, l$$

Principe des travaux virtuels

Principe des puissances virtuelles



Jean-Baptiste Le Rond D'Alembert.
Maurice Quentin de La Tour (1704 – 1788)



Traité de Dynamique.
Paris: Chez David, 1743.

Quelle utilité pour ce déplacement virtuel?

Selon le **principe d'Alembert**: le travail virtuel des forces de contraintes agissant sur un système est nul, car celles-ci sont tout le temps perpendiculaires au déplacement virtuel.

Principe fondamentale de la dynamique

On considère un système de N points matériels de masse m_α , soumis à des forces.

Les forces peut se décomposer en des forces actives ($\overrightarrow{F_a^\alpha}$) et des forces de contrainte ($\overrightarrow{F_l^\alpha}$) (ou de liaisons).

Le principe fondamentale de la dynamique , appliqué sur chaque point α s'écrit sous la forme:

$$\overrightarrow{F^\alpha} = \overrightarrow{F_a^\alpha} + \overrightarrow{F_l^\alpha} = m_\alpha \overrightarrow{\gamma^\alpha}$$

Pour l'ensemble de N points matériels, on écrit :

$$\sum_{\alpha}^N \overrightarrow{F^\alpha} = \sum_{\alpha}^N (\overrightarrow{F_a^\alpha} + \overrightarrow{F_l^\alpha}) = \sum_{\alpha}^N m_\alpha \overrightarrow{\gamma^\alpha}$$

$$\sum_{\alpha}^N \overrightarrow{F^\alpha} = \sum_{\alpha}^N \overrightarrow{F_a^\alpha} + \sum_{\alpha}^N \overrightarrow{F_l^\alpha} = \sum_{\alpha}^N m_\alpha \overrightarrow{\gamma^\alpha}$$

Travail virtuel élémentaire (TV)

Définition : À une date quelconque t , on appelle travail virtuel élémentaire (noté T.V.) d'une force $\vec{F}$, appliquée à un point M d'un système, le travail élémentaire de $\vec{F}$ dans un déplacement virtuel élémentaire, δM , à cette date s'écrit:

$$\delta W = \vec{F} \cdot \delta \vec{M}$$

Pour N points matériels

$$\delta W = \sum_{\alpha}^N \vec{F}^{\alpha} \cdot \delta \vec{r}^{\alpha} = \sum_{\alpha}^N (\vec{F}_a^{\alpha} + \vec{F}_l^{\alpha}) \cdot \delta \vec{r}^{\alpha}$$

A l'équilibre

$$\delta W = \sum_{\alpha}^N \vec{F}^{\alpha} \cdot \delta \vec{r}^{\alpha} = \sum_{\alpha}^N (\vec{F}_a^{\alpha} + \vec{F}_l^{\alpha}) \cdot \delta \vec{r}^{\alpha} = 0$$

Condition des travaux virtuels : Hypothèses



$$\sum_{\alpha}^N \vec{F}_l^{\alpha} \cdot \delta \vec{r}^{\alpha} = 0$$

$\vec{F}_l^{\alpha}$: force de liaison s'exerçant sur le point α

$\delta \vec{r}^{\alpha} / \alpha = 1, \dots, N$: déplacement virtuel compatible

On ne considérera que des liaisons qui respectent cette condition (liaisons parfaites), c'est-à-dire que la somme des travaux est nulle pour tout déplacement virtuel compatible

NB: Individuellement les forces de contrainte peuvent travailler lors d'un déplacement virtuel.

Principe des travaux virtuels en statique

En absence de frottements et en appliquant le principe des travaux virtuels en statique pour des $\delta \vec{r}^\alpha$ compatibles entre eux et avec les liaisons, on obtient :

$$\sum_{\alpha}^N \vec{F}_a^\alpha \cdot \delta \vec{r}^\alpha = \vec{0}$$

C'est le principe d'Alembert en statique

Note : les forces de liaisons sont éliminées, par l'introduction des déplacements virtuels compatibles avec les contraintes.

Le principe d'Alembert en dynamique

Pour tout déplacement virtuel compatible avec les contraintes :

$$\sum_{\alpha}^N (m_{\alpha} \overrightarrow{\gamma^{\alpha}} - \overrightarrow{F^{\alpha}}) \cdot \delta \overrightarrow{r^{\alpha}} = \overrightarrow{0}$$

On d'autres termes, la somme des travaux des forces appliqués (actives) et des forces d'inertie est nulle pour tout déplacement virtuel compatible avec les contraintes.

Cette équation est analogue au principe des travaux virtuels

Principe d'Alembert : 2^{eme} énoncé

Le travail des forces extérieures et intérieures d'un système lors d'un déplacement virtuel est égal au travail virtuel de la quantité des accélérations du système

Principe de d'Alembert et conditions d'application

Remarques

- Déplacement virtuel: $\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_i + \delta\vec{r}_i^*$ à un instant donné t ($\delta t = 0$);
- Les forces appliquées au système, extérieures et intérieures, restent constantes lors d'un déplacement virtuel ;
- Lorsque les liaisons sont parfaites et holonômes, le travail virtuel des forces de liaison est nul aussi bien en statique qu'en dynamique ;
- Les déplacements virtuels sont compatibles aux liaisons : les liaisons ne sont pas « cassées » lors du mouvement ;
- Lorsque les liaisons sont holonômes, les déplacement virtuels sont tangents à la surface de contact (Σ) ;

Force généralisée et accélération généralisée

Pour tout déplacement virtuel compatible avec les contraintes :

$$\delta \vec{r}^{\alpha} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial q_i} \delta q_i$$

Et sachant que:

$$\sum_{\alpha}^N (m_{\alpha} \vec{\gamma}^{\alpha} - \vec{F}^{\alpha}) \cdot \delta \vec{r}^{\alpha} = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \sum_{\alpha}^N (m_{\alpha} \vec{\gamma}^{\alpha} - \vec{F}^{\alpha}) \cdot \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial q_i} \delta q_i = \vec{0}$$

$$\forall \delta q_i \quad ; \quad \sum_i^n \sum_{\alpha}^N (m_{\alpha} \vec{\gamma}^{\alpha} \frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial q_i} - \vec{F}^{\alpha} \frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial q_i}) \cdot \delta q_i = 0$$

Comme nous avons supposé le système holonome, tous les δq_i sont indépendants et l'on obtient:

$$\forall i = 1, \dots, N \quad ; \quad \sum_{\alpha}^N m_{\alpha} \vec{\gamma}^{\alpha} \frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial q_i} - \sum_{\alpha}^N \vec{F}^{\alpha} \frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial q_i} = 0$$

On appelle force généralisée la quantité définie par :

$$Q_i = \sum_{\alpha}^N \vec{F}^{\alpha} \frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial q_i}$$

Q_i : force généralisée associée à q_i

On définit la quantité d'accélération généralisée comme suit :

$$A_i = \sum_{\alpha}^N m_{\alpha} \vec{\gamma}^{\alpha} \frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial q_i}$$

Le travail virtuel et accélération généralisée

$$\delta W = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \overrightarrow{\gamma^{\alpha}} \cdot \delta \overrightarrow{r^{\alpha}} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \overrightarrow{\dot{v}^{\alpha}} \cdot \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \overrightarrow{r^{\alpha}}}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_i A_i \delta q_i$$

A_i est la $i^{\text{ème}}$ composante de l'accélération généralisée :

$$A_i = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \overrightarrow{\dot{v}^{\alpha}} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{r^{\alpha}}}{\partial q_i}$$

NB: on peut reprendre l'expression du travail virtuel, en utilisant l'expression de l'accélération ($m_{\alpha} = cte$) :

Le travail virtuel et accélération généralisée

$$\delta W(\vec{F}_a^\alpha) = \sum_{\alpha}^N \vec{F}_a^\alpha \cdot \delta \vec{r}^\alpha = \sum_{\alpha}^N \vec{F}_a^\alpha \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}^\alpha}{\partial q_i} \delta q_i$$

$$\delta W(\vec{F}_a^\alpha) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_a^\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}^\alpha}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \sum_{i=1}^n Q_i \cdot \delta q_i$$

$$Q_i = \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_a^\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}^\alpha}{\partial q_i}$$

Q_i : force généralisée associée à q_i

La dimension de Q_i est telle que $Q_i q_i$ à la dimension de l'énergie

• Si les forces dérivent d'une énergie potentielle V :

$$Q_i = \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_a^\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}^\alpha}{\partial q_i} = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k=1}^3 \vec{F}_a^{\alpha,k} \cdot \frac{\partial \vec{r}^{\alpha,k}}{\partial q_i} = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k=1}^3 - \frac{\partial V}{\partial \vec{r}^{\alpha,k}} \frac{\partial \vec{r}^{\alpha,k}}{\partial q_i} = - \frac{\partial V}{\partial q_i}$$

Force généralisée et accélération généralisée dans 1 RNG

Les relations précédentes sont établies dans un référentiel galiléen.

Dans le cas où le référentiel n'est pas galiléen, comme le PFD s'écrit dans un référentiel non galiléen comme suit:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{\alpha}^N \vec{F}_a^{\alpha} + \vec{f}_{in}^{\alpha}$$

$$A_i = Q_i + Q_{in}^{\alpha}$$

$$Q_{in}^{\alpha} = \sum_{\alpha}^N \vec{f}_{in}^{\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_i}$$

- $\vec{f}_{\alpha}^{in}$: les forces d'inertie
- Q_i^{in} : les forces généralisées d'inertie

Notons que l'énergie cinétique T est exprimée aussi dans le référentiel non galiléen.

Décomposition de l'énergie cinétique

Décomposition de l'énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \dot{\vec{r}}^{\alpha 2}$$

Nous remplaçons

$$\dot{\vec{r}}^{\alpha} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial t}$$

On écrit donc

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial t} \right)^2$$

Décomposition de l'énergie cinétique

On trouve

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial t} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial q_k} \dot{q}_k \right)^2 + \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial q_k} \dot{q}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial t} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial t} \right)^2 \end{aligned}$$

L'énergie cinétique s'écrit:

$$T = T_0 + T_1 + T_2$$

Décomposition de l'énergie cinétique

Avec

$$T_0 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \left(\frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial t} \right)^2$$

$$T_1 = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial t} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial q_k} \dot{q}_k \right)$$

$$T_2 = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}^{\alpha}}{\partial q_k} \dot{q}_k \right)^2$$

Cas particuliers :

Cas d'un système à liaison scléronome (Contrainte ne dépend pas du temps)

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(\mathbf{q}_k) \Rightarrow \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} T_0 = 0 \\ T_1 = 0 \end{cases}$$

$$T = T_2$$

Le cas d'un système à liaison scléronome

$\Leftrightarrow$ L'énergie cinétique est une forme quadratique de vitesse généralisée.

FIN DE DU CHAPITRE 1

MERCI DE VOTRE ATTENTION

Questions

