

Chapitre I: Fondement de la mécanique analytique

DESCRIPTION D'UN SYSTÈME MATÉRIEL

1- Exemples

Exemple 1: système mécanique

Soit un système mécanique constitué par N points matériels $\Rightarrow$ positions $\{\vec{r}_i; i = 1, \dots, N\}$ et vitesses $\{\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i; i = 1, \dots, N\}$

L'approche standard de la mécanique newtonienne :

$\rightarrow$ relier les quantités de mouvement aux forces

$$\sum_{i=1}^{i=N} \vec{F}_{ext} = \sum_{i=1}^{i=N} \frac{d[m_i \vec{v}_i]}{dt}$$

$\Rightarrow$ Équations différentielles vectorielles de 2^{ème} ordre

Exemple d'un système mécanique de N points matériels

⇒ Expressions des forces + conditions initiales sur $\vec{r}_i$ et $\vec{v}_i$

⇒ Equation du mouvement

⇒ Etat dynamique du système est déterminé par :

$$\{(\vec{r}_i, \vec{v}_i); i = 1, \dots, N\}$$

Exemple d'un système mécanique de N points matériels

Toutefois, en présence des forces de liaison (mal connues)

⇒ Les $3N$ coordonnées ne sont pas toutes indépendantes :
Relation entre les positions et parfois les vitesses .

⇒ Forces de liaison dans les équations du mouvement.

$$\sum_{i=1}^{i=N} \frac{d[m_i \vec{v}_i]}{dt} = \sum_{i=1}^{i=N} \vec{F}_{ext} + \sum \text{Forces de liaison}$$

⇒ La résolution des équations du mouvement devient fastidieuse :

Elimination des forces de liaison en utilisant un système de coordonnées bien adapté.

Description d'un système matériel

Exemple 2: pendule simple

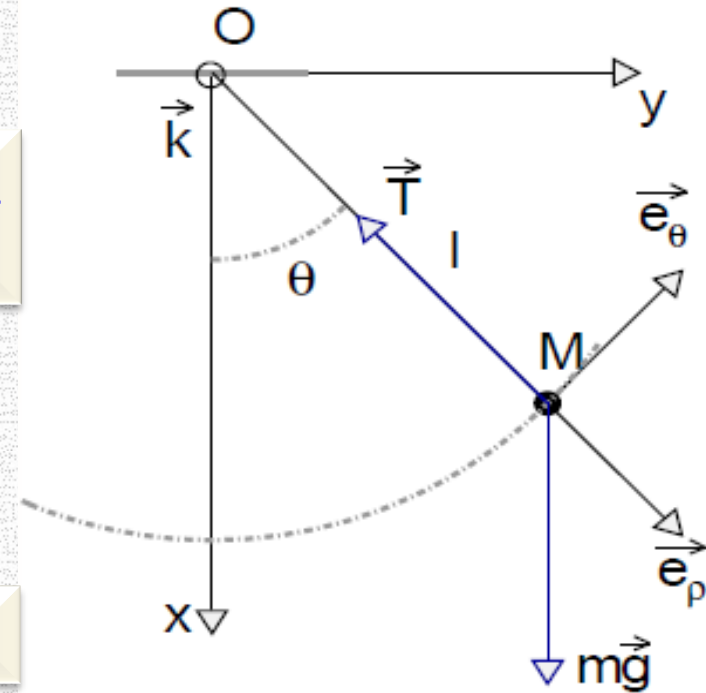
△ $\Rightarrow$ 3 coordonnées pour décrire la position :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = (x, y, z)$$

△ Mouvement dans le plan (Oxy) $\Rightarrow z = 0$

△ Force de liaison = Tension du fil $\vec{T}$,
fil inextensible $\Rightarrow$ contrainte $x^2 + y^2 = l^2$:

△ Le problème c'est qu'on ne connaît pas l'expression des composantes de la force $\vec{T}$ dite de contrainte : $\vec{T}_x$ et $\vec{T}_y$



⇒ Elimination de $\vec{T}$ en utilisant les coordonnées polaires $\vec{r} = (l, \theta) \Rightarrow$ Projection sur $\vec{e}_\theta$.

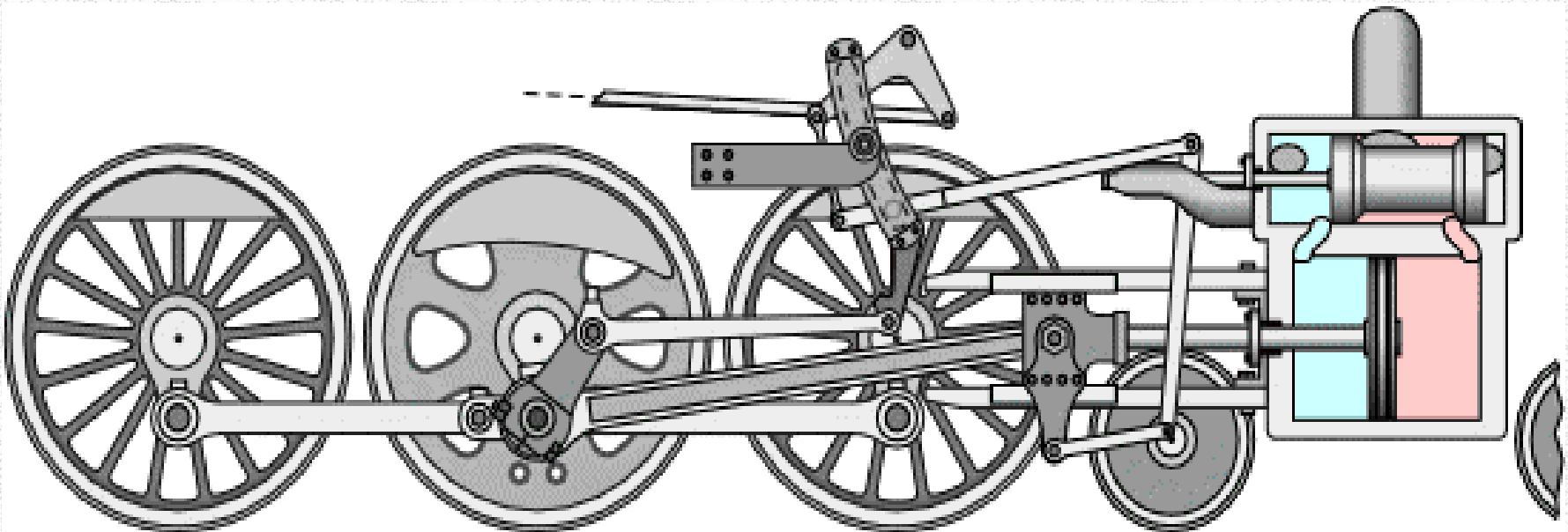
Donc, l'astuce était de trouver un système de coordonnées physiques dans lequel on pouvait se débarrasser de la force de contrainte dans l'une (ou plus) des équations différentielles du mouvement



nous permettait de trouver l'équation différentielle du mouvement sans pour autant connaître cette force de contrainte.



Malheureusement, cette astuce de changement des coordonnées pour éliminer les forces de contraintes pour déterminer les équations différentielles du mouvement **ne marche pas tout le temps**, surtout pour des systèmes plus complexes que l'exemple du pendule simple, où il y a lieu des forces de contrainte !!!





Il est très utile donc de passer à un formalisme plus élégant et plus efficace, construit autour du concept d'énergie. C'est le formalisme dit de Lagrange (Joseph-Louis Lagrange ; 1736 – 1813).

Il permet de “contourner les difficultés” du formalisme newtonien en relation avec les notions de forces et de vecteurs et plus particulièrement aux forces de contrainte pas toujours évidentes à exprimer.

L'approche standard de la mécanique analytique permet de :

⇒ Eliminer les forces de liaison ;

⇒ Utiliser seulement les coordonnées indépendantes.

⇒ Coordonnées généralisées

Paramétrage d'un système : Coordonnées généralisées

Coordonnées généralisées = Paramètres de configuration
= Paramètres primitifs du système matériel

Définition

On appelle **paramètres de configuration** ou **coordonnées généralisées** d'un système, un ensemble de n paramètres **indépendantes** nécessaire pour décrire le mouvement d'un système mécanique quelconque à un instant t donné.

Elles sont notées (q_i) avec $i = 1, \dots, n$

Ces paramètres sont appelés **coordonnées généralisées** car elles peuvent être des **coordonnées spatiales** et /ou **angulaires**.

i- Cas d'un point matériel :

- La position d'un point matériel est parfaitement déterminée par 3 coordonnées (cartésiennes, cylindriques, sphériques,.. etc.)

Exemple: cartésiennes

$$\overrightarrow{OM}(x, y, z) \Rightarrow q = (x, y, z)$$

Exemple: Cylindriques

$$\overrightarrow{OM}(\rho, \varphi, z) \Rightarrow q = (\rho, \varphi, z)$$

Exemple: Sphériques

$$\overrightarrow{OM}(r, \theta, \varphi) \Rightarrow q = (r, \theta, \varphi)$$

ii- Cas d'un solide :

La position d'un solide est entièrement déterminée par des paramètres qui sont les coordonnées de son centre d'inertie et les angles d'Euler.

Cas d'un solide non rectiligne

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} (x_G, y_G, z_G, \underbrace{\psi, \theta, \varphi}_{\text{angles d'Euler}}) \\ \Rightarrow q = (x_G, y_G, z_G, \underbrace{\psi, \theta, \varphi}_{\text{angles d'Euler}}) \end{aligned}$$

Cas d'un solide rectiligne

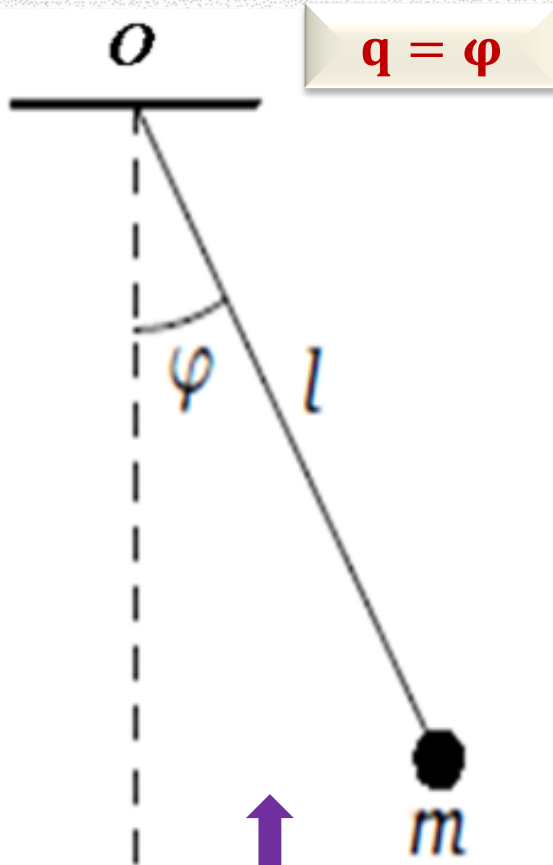
$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} (x_G, y_G, z_G, \underbrace{\psi, \theta}_{\text{angles d'Euler}}) \\ \Rightarrow q = (x_G, y_G, z_G, \underbrace{\psi, \theta}_{\text{angles d'Euler}}) \end{aligned}$$

iii- Cas d'un système Σ :

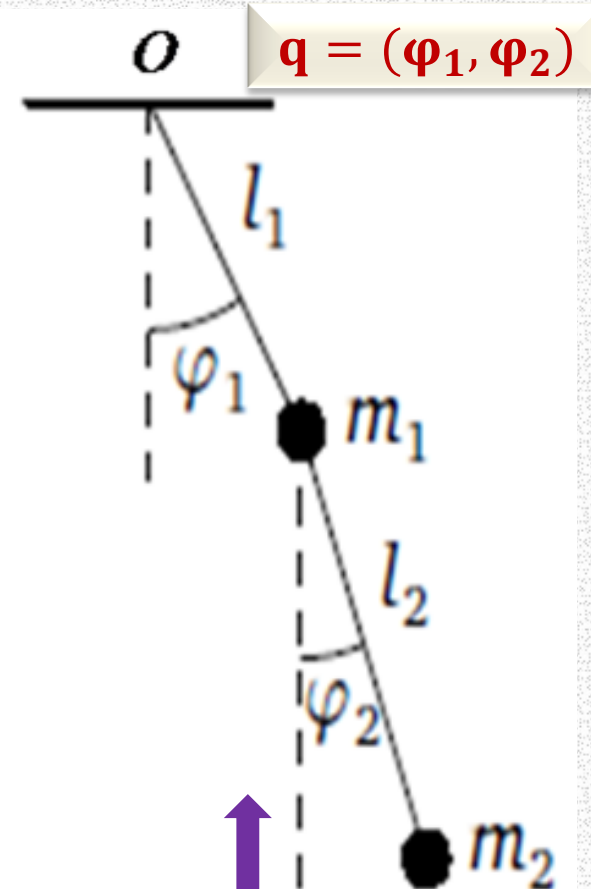
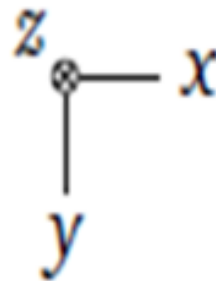
- La position d'un système matériel composé de « P » points et « S » solides est alors déterminée par $N = 3P + 6S$ paramètres.

Soient $q_1, q_2, \dots, q_N$: N paramètres

Exemple: Choix de coordonnées généralisées



Le pendule simple



Le pendule double

Le cas du pendule double

🌸 Mouvement dans le plan Oxy ce qui donne les deux relations $z_1 = 0$ et $z_2 = 0$.

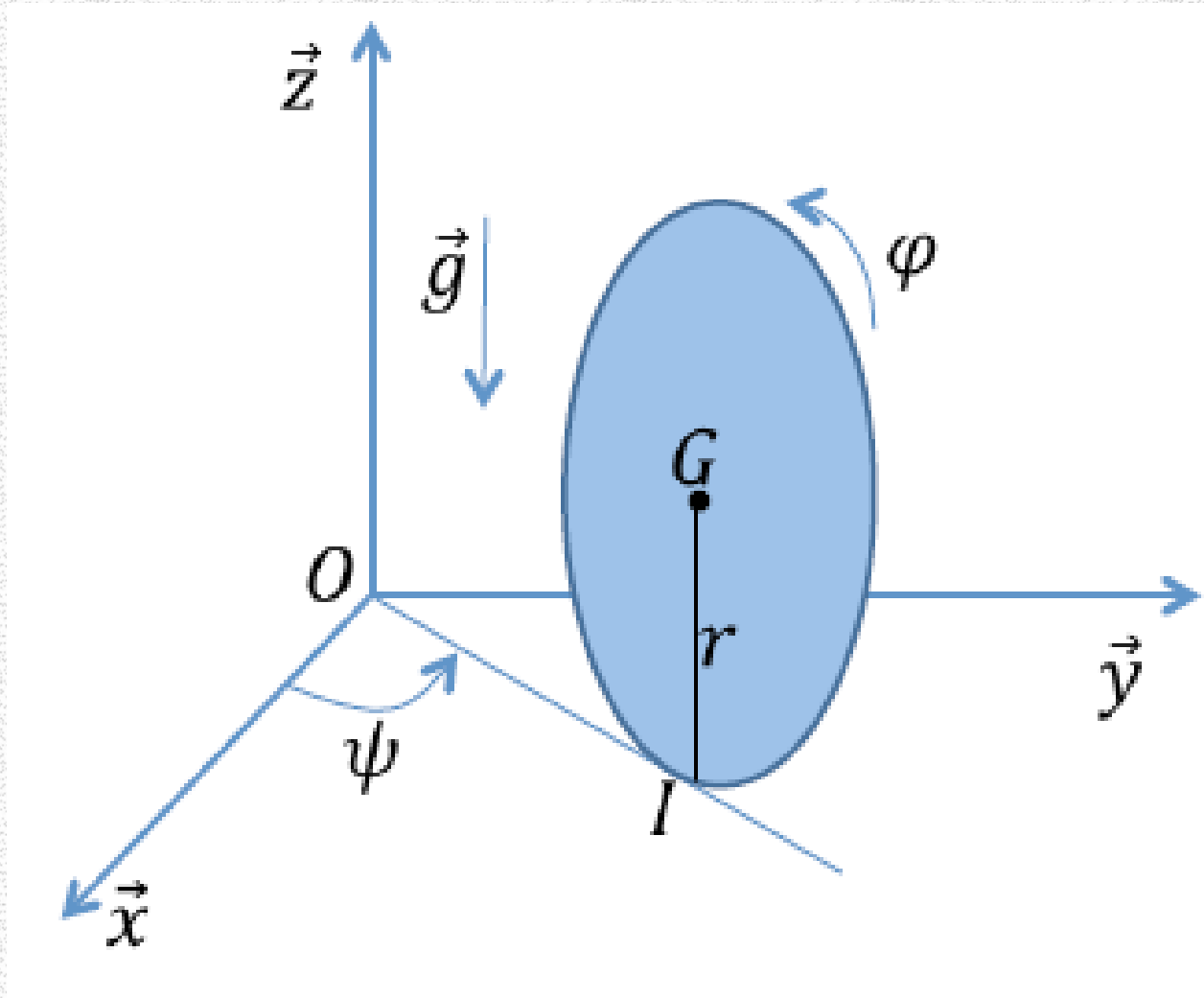
🌸 Les fils sont de longueur fixe, ce qui implique que:

$$\begin{cases} \|\overrightarrow{OM_1}\| = r_1 = l_1 \\ \|\overrightarrow{OM_2}\|^2 = \|\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M_2}\|^2 = r_2^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \end{cases}$$

Aussi, nous obtenons deux relations entre les coordonnées. La première qui fixe r_1 à l_1 et la deuxième exprime r_2 en fonction de φ_1 et φ_2 , ce qui veut dire que la connaissance des deux angles suffit pour déterminer r_2 .

D'où le mouvement du système peut être décrit seulement par deux coordonnées (φ_1, φ_2) .

Exemple: Cerceau qui roule sur un plan



$$\mathbf{q} = (x_G, y_G, \psi, \varphi)$$

On considère un système matériel dont la position est déterminée par n variables indépendantes $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n$, notés $\{q_i\}_{i=1 \text{ à } n}$.

$\bar{q} = \{q_i\}_{i=1 \text{ à } n}$ est appelée **espace de configuration (espace généralisé)** à n dimensions.

Au cours du temps, tous point M du système décrit une trajectoire dans cet espace, i.e $\forall M \in (S) \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(\bar{q}, t)$.

Pour un système constitué de N particules, en mouvement quelconque les unes par rapport aux autres, le nombre de degrés de liberté est $n = 3N$.

L'espace de configuration a donc dans ce cas $3N$ dimensions.

NB

Un point de l'espace de configuration détermine la position du système et non son état mécanique, lequel exige, en outre, la connaissance de l'ensemble des vitesses ou mieux des quantités de mouvement.

Indépendances des coordonnées généralisées

- Si tous les q_i sont indépendantes alors $\dim(S) = n$.
- Si il y a "m" relations entre les q_i alors $\dim(S) = n - m$.

Exemple s:

- ❖ Soient 2 points M_1 et M_2 sont indépendantes donc obligatoirement on a un système à 6 dimensions.



dim = 6

- ❖ Si M_1 et M_2 sont liés par la relation $M_1 M_2 = l$

⇒ On aura un système à 5 dimensions car la 6^{ème} sera relié par une équation $M_1 M_2 = l$

D'où $\dim = d.d.l = 6 - 1 = 5$.



dim = 6 - 1 = 5

Vitesse généralisée

- Pour un point de l'espace physique (de dimensions 3), la vitesse est définie à partir du vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$:

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

- Nous généralisons cette écriture comme suit:

$$\Rightarrow \vec{V}(M) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

Avec

$q(q_1, q_2, \dots, q_N)$ sont des coordonnées généralisées

$\dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N)$: la vitesse généralisée de dimension N , tel que:

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$$

Liaisons mécaniques $\longleftrightarrow$ contraintes

D'une manière générale les solides ne sont pas libres, mais soumis à des liaisons constituant des **contraintes** limitant leurs mouvements. Il est essentiel de tenir compte de ces liaisons dans le choix du paramétrage.

L'effet d'une liaison $\Rightarrow$ réduire le nombre de mouvements possibles :

Définition : On appelle liaison toute restriction de liberté à un système (particule, solide, ...) vis-à-vis d'un autre système en terme de : Position et / ou de vitesse



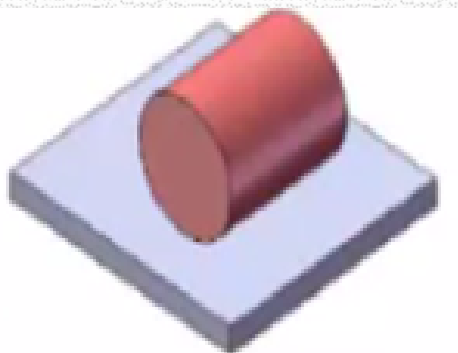
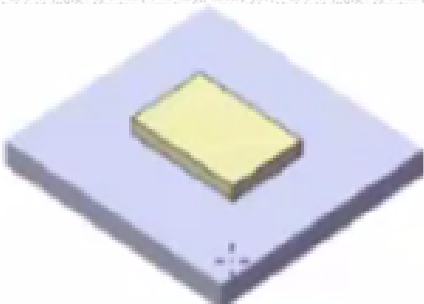
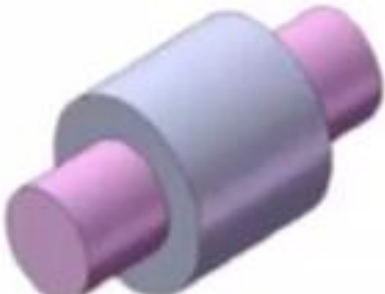
Les contraintes engendrées par les forces de liaison peuvent être exprimées en fonction des positions, ou des vitesses, ou des deux à la fois.

Les relations $F(q_i, \dot{q}_i, t) = 0$ appelées des contraintes.

$\Rightarrow F$ sont différentiables en tout point.

$\Rightarrow$ une contrainte permet de réduire le nombre de coordonnées initiales d'une unité.

Les différents types de contact

Contact ponctuel			
Contact linéaire Ou linéique			
Contact surfacique			

Classification des liaisons

Liaisons holonomes (géométriques)

Une liaison est dite holonome si elle se traduit par une relation entre les paramètres de configuration $\mathbf{q}_i$ est éventuellement le temps t , elle est de la forme : $\mathbf{F}(\mathbf{q}_i, t) = 0$.

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad \forall \quad i$$

On distingue:



Liaison unilatérale: $f(q_1, \dots, q_n, t) < 0$

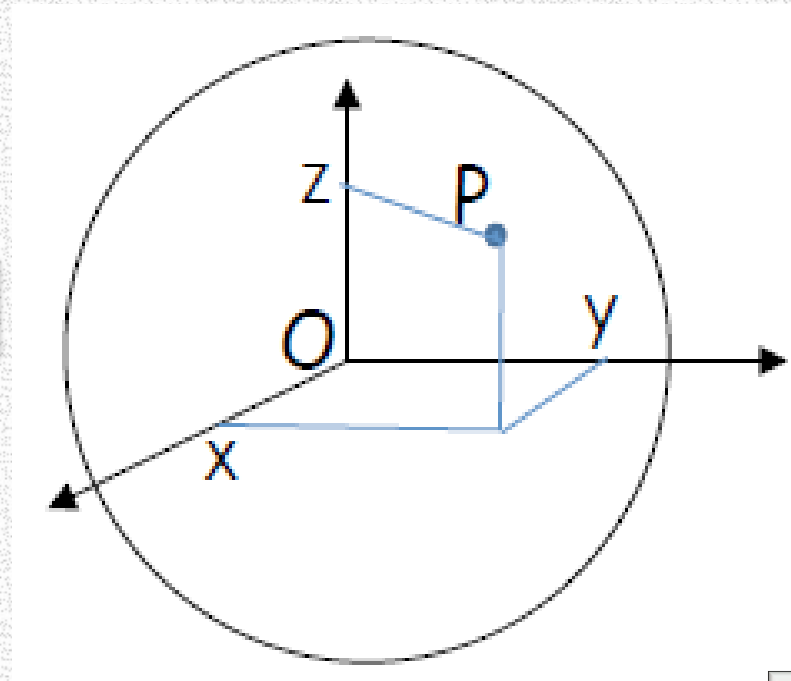
Exemple : bille à l'intérieure d'une sphère de rayon R
(Contact unilatéral entre deux solides ...)

$q(x, y, z)$

$$F(q, t) = x^2 + y^2 + z^2 < R^2$$



Liaison holonome unilatérale





Liaison bilatérale: $f(q_1, \dots, q_n, t) = 0$

Ces relations traduisent une liaison géométrique:
(Contact bilatérale entre deux solides)

Deux points M_1 et M_2 sont liés par la relation $M_1M_2 = l$.



La liaison bilatérale traduit par la relation $M_1M_2 = l$.

$$\text{NDL} = 6 - 1 = 5$$

Liaisons non-holonomes (cinématique)

Ce sont des liaisons dépendantes des q , $\dot{q}$ & t , de la forme :

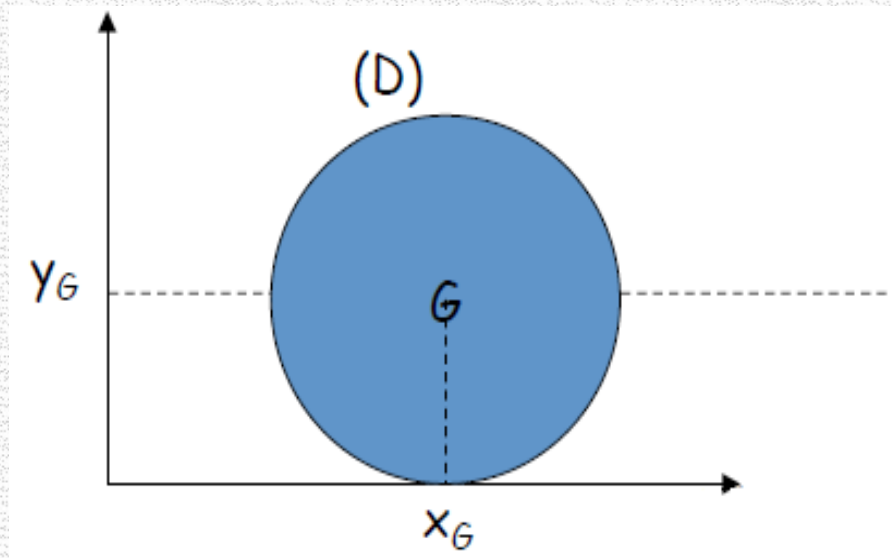
$F(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) < 0$: Liaison unilatérale

$F(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) = 0$: Liaison bilatérale

Ces relations traduisent une liaison cinématique

Exemple: roulement sans glissement en un point de contact

Exemple 1: Disque roulant sans glisseur sur un axe



Equations de liaison :



$y_G - R = 0$: Condition géométrique de contact (liaison holonome)



$\dot{x}_G + R \dot{\varphi} = 0$: **CRSG** : Condition cinématique (liaison non holonome)

Liaisons dans le cas de solides : Torseur des actions de contact

Rappelons que le torseur des actions de contact, dont les éléments de réduction exprimés au centre de la liaison A par rapport à un repère R, est donné par:

$$\mathcal{F} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{cc} \mathcal{R}_x & \mathcal{M}_x \\ \mathcal{R}_y & \mathcal{M}_y \\ \mathcal{R}_z & \mathcal{M}_z \end{array} \right\}}_{\mathcal{R}}$$

où $\mathcal{R}_i$ et $\mathcal{M}_i$ sont respectivement les composantes de la résultante des réactions appliquées au solide et leurs moments par rapport au point A dans R.

Effets des degrés de liaison sur le mouvement d'un solide

$\Rightarrow$ Tout degré de liaison de translation selon un axe Δ implique que la composante de $\vec{R}$ selon Δ est non nulle.

Nous pouvons raisonner également comme suit : tout degré de liberté de translation selon l'axe Δ implique que la composante de $\vec{R}$ selon Δ est nulle.

$\Rightarrow$ Tout degré de liaison de rotation selon un axe Δ implique que la composante de $\vec{\mathcal{M}}$ selon Δ est non nulle.

Nous pouvons raisonner également comme suit : tout degré de liberté de rotation selon l'axe Δ implique que la composante de $\vec{\mathcal{M}}$ selon Δ est nulle.

Le nombre de degré de liberté (NDL)

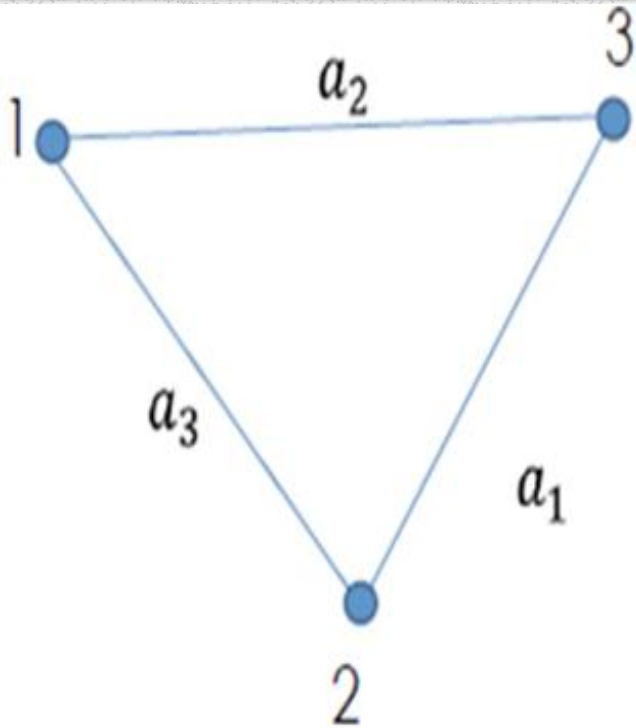
Le nombre de degrés de liberté d'un système est le nombre de paramètres indépendants qu'il faut pour déterminer de façon unique la position du système.

On considère un système S paramétré par N coordonnées généralisés ($N = 6s + 5r + 3l$) (le système contient des solides en mouvement quelconques ($6s$), des solides en translation ($5r$) et des points matériels ($3l$)). Le système admet h liaisons holonomes et p liaisons non holonomes. Le nombre de degrés de liberté n compte tenu de toutes les liaisons est défini par :

$$\text{NDL} = n = N - h - p$$

Le nombre de degrés de liberté d'un solide = Nombre de paramètres de position – Nombre d'équations de liaison.

Exemple : Système de 3 points matériels liés



$$\begin{cases} f_1 = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| - a_3 = 0 \\ f_2 = |\vec{r}_2 - \vec{r}_3| - a_1 = 0 \\ f_3 = |\vec{r}_3 - \vec{r}_1| - a_2 = 0 \end{cases}$$

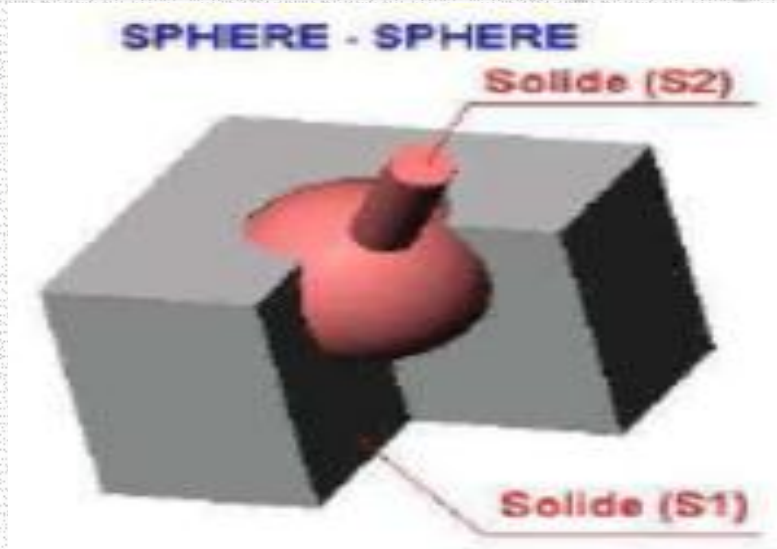
$\Rightarrow$ Nombre de liaisons : $l = 3$

Nombre de degrés de liberté : $NDL = 3n - l = 9 - 3 = 6$

Liaisons élémentaires : Torseur des actions de contact

Exemples des liaisons et nombre de degré de liberté (NDL)

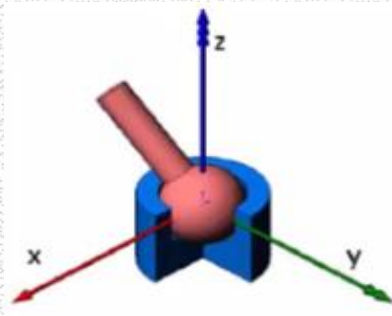
● Liaison rotule ou sphérique (sphère/sphère)



Le point A_2 de (S_2) reste confondus avec un point A_1 de (S_1)

Le mouvement se décompose :

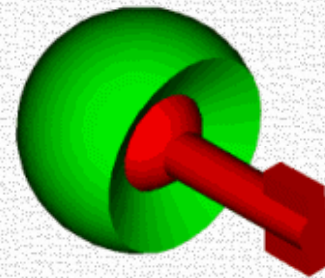
- Rotation autour de $(O, \vec{x})$, $(O, \vec{y})$ et $(O, \vec{z})$



Le point A_2 de (S_2) reste confondus avec un point A_1 de (S_1)

Le mouvement se décompose :

- Rotation autour de $(O, \vec{x})$, $(O, \vec{y})$ et $(O, \vec{z})$



Liaisons :

$$T_x = 0$$

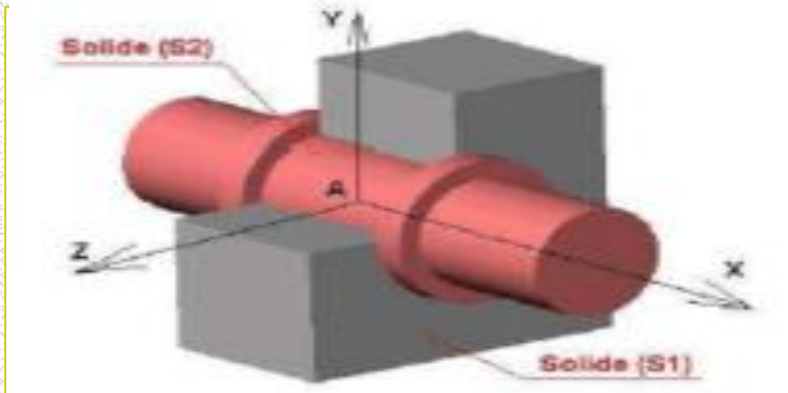
$$T_y = 0$$

$$T_z = 0$$

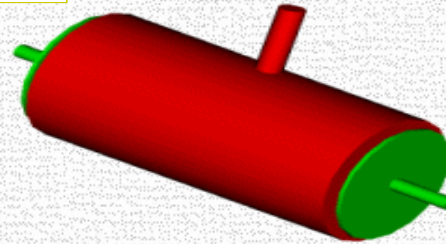
$$\mathcal{F} = {}_A \left\{ \begin{matrix} \mathcal{R}_x & 0 \\ \mathcal{R}_y & 0 \\ \mathcal{R}_z & 0 \end{matrix} \right\}_{\mathcal{R}}$$

Bilan : 0 translation et 3 rotations autour de $(O, \vec{X})$, $(O, \vec{Y})$ et $(O, \vec{Z})$: $\Rightarrow$ 3 DDL

liaison pivot : Cylindre/Cylindre



Deux points A_2 et B_2 de (S_2) Distants d'une longueur L restent Confondus avec deux points A_1 et B_1 de (S_1) distants de la même longueur L



Liaisons :

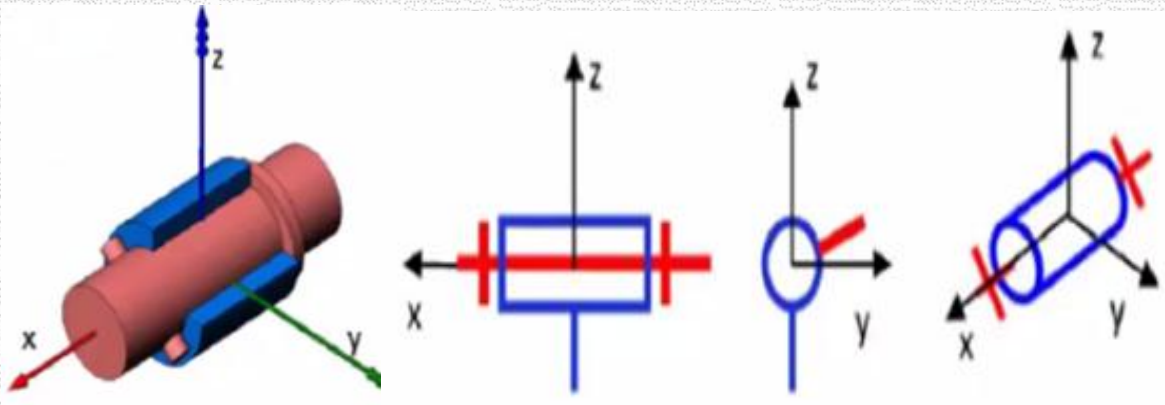
$$T_x = 0$$

$$T_y = 0$$

$$T_z = 0$$

$$R_y = 0$$

$$R_z = 0$$

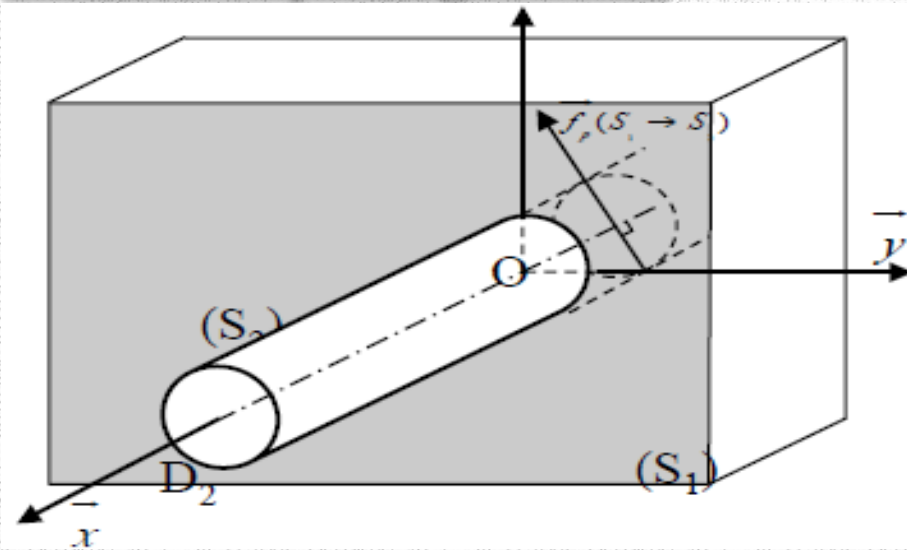


$$\mathcal{F} = \begin{Bmatrix} \mathcal{R}_x & 0 \\ \mathcal{R}_y & \mathcal{M}_y \\ \mathcal{R}_z & \mathcal{M}_z \end{Bmatrix}_A \mathcal{R}$$

Cette liaison a cinq degrés de liaison : trois degrés de translation et deux degrés de rotation.

Bilan : Seule une rotation (ici autour de (OX)) est permise $\Rightarrow$ 1 DDL

liaison pivot glissant



Le mouvement de $(S_2)/(S_1)$ se décompose en :

- rotation autour de $(O, \vec{X})$.
- translation suivant $(O, \vec{X})$.

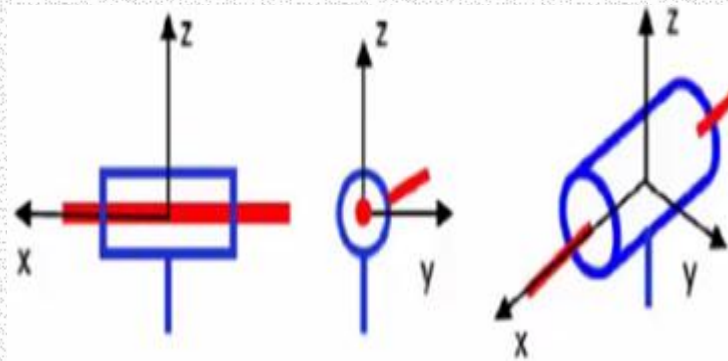
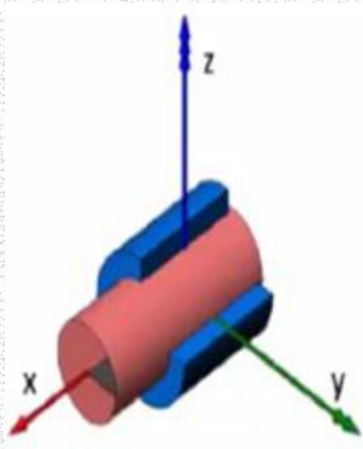
Liaisons :

$$T_y = 0$$

$$T_z = 0$$

$$R_y = 0$$

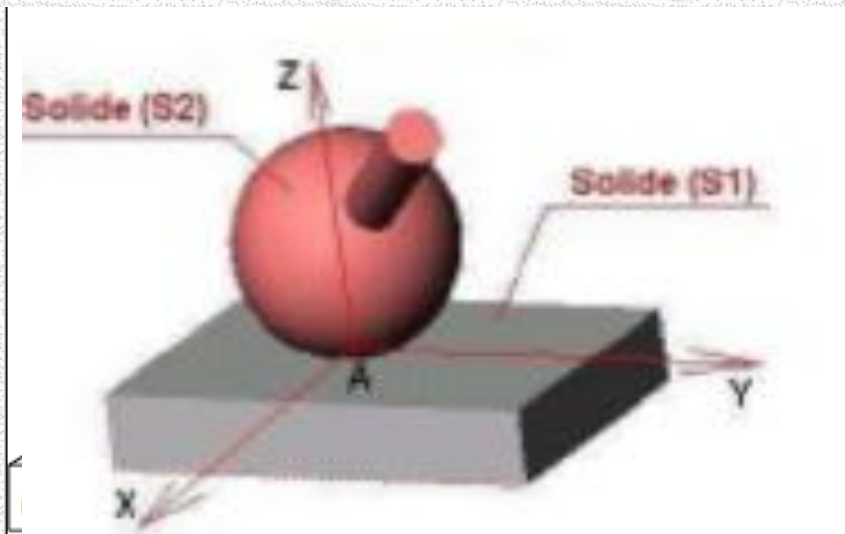
$$R_z = 0$$



$$\mathcal{F} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{R}_y & \mathcal{M}_y \\ \mathcal{R}_z & \mathcal{M}_z \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}^A$$

Bilan : 1 translation et 1 rotation $\Rightarrow$ 2 DDL

Liaison ponctuelle : Sphère sur plan

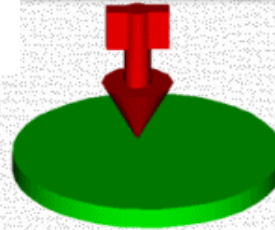


Le point A_2 de (S_2) reste dans le plan π_1 de (S_1)

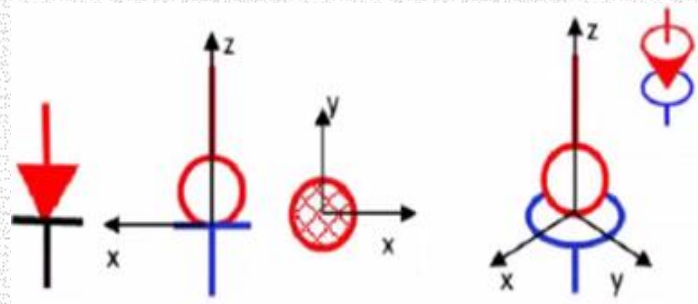
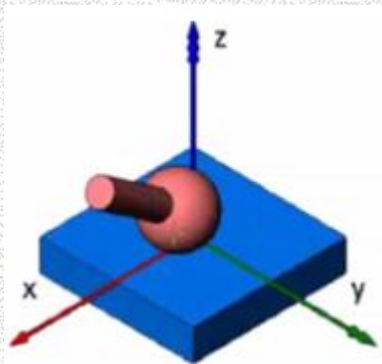
Le mouvement de $(S_2)/(S_1)$ se décompose :

Rotation autour de $(O, \vec{x})$, $(O, \vec{y})$ et $(O, \vec{z})$

Translation suivant $(O, \vec{x})$, $(O, \vec{y})$



Liaisons :
 $T_z = 0$

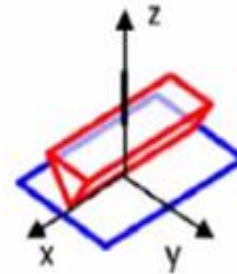
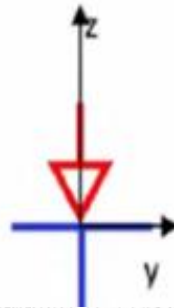
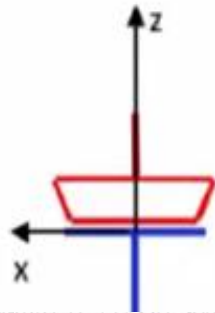
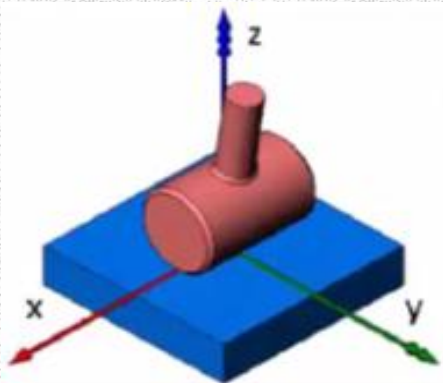
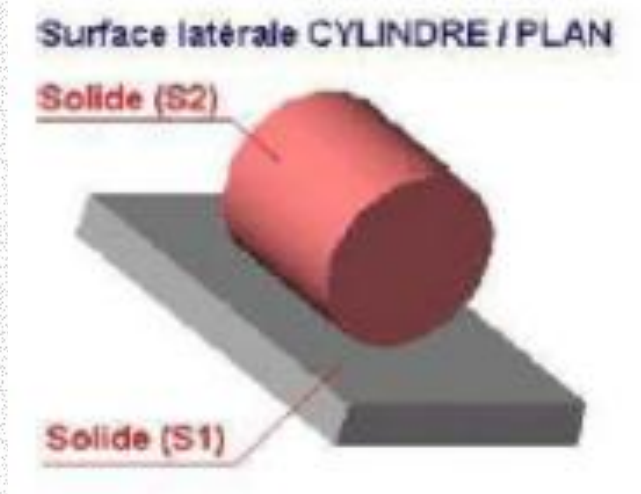


$$\mathcal{F} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \mathcal{R}_z & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}^A$$

Cette liaison a un degré de liaison de translation selon l'axe perpendiculaire à la surface de contact, ici selon Oz .

Bilan : 2 translation et 3 rotations autour de $(O, \vec{X})$, $(O, \vec{Y})$ et $(O, \vec{Z}) \Rightarrow 5$ DDL

Liaison linéaire rectiligne : **Cylindre/Plan**



Liaisons :

$$T_x = 0$$

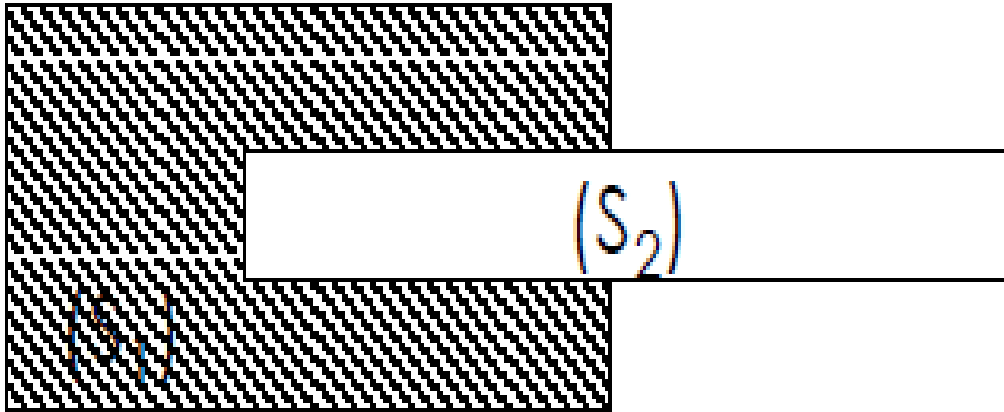
$$R_y = 0$$

$$\mathcal{F} = \begin{Bmatrix} \mathcal{R}_x & 0 \\ 0 & \mathcal{M}_y \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A \mathcal{R}$$

Cette liaison a deux degrés de liaison : un degré de translation selon Ox et un degré de rotation selon Oy .

Bilan : 2 translation et 2 rotations autour de $(O, \vec{X})$ et $(O, \vec{Z})$: $\Rightarrow$ 4 DDL

Liaison encastrement



Le mouvement de $(S_2)/(S_1)$ est bloqué dans toutes les directions.

Liaisons :

$$T_x = 0$$

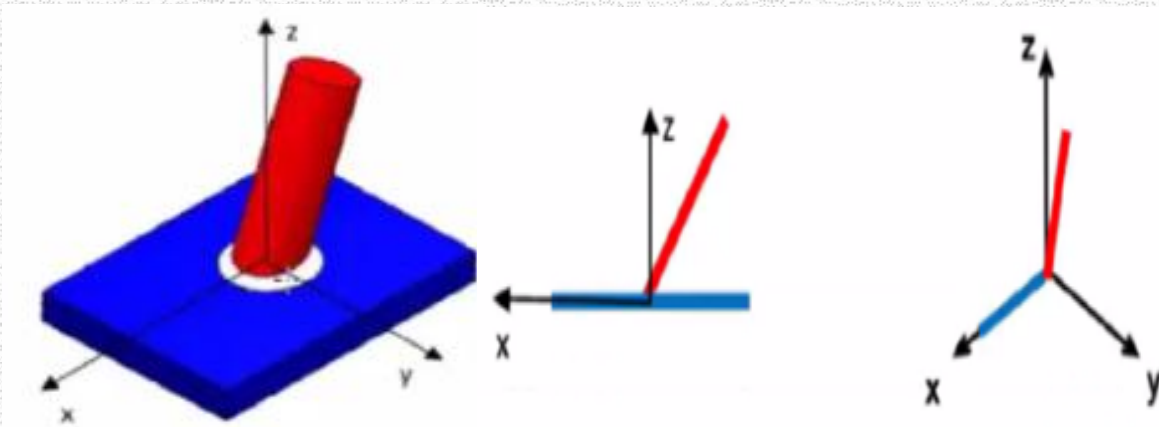
$$T_y = 0$$

$$T_z = 0$$

$$R_x = 0$$

$$R_y = 0$$

$$R_z = 0$$

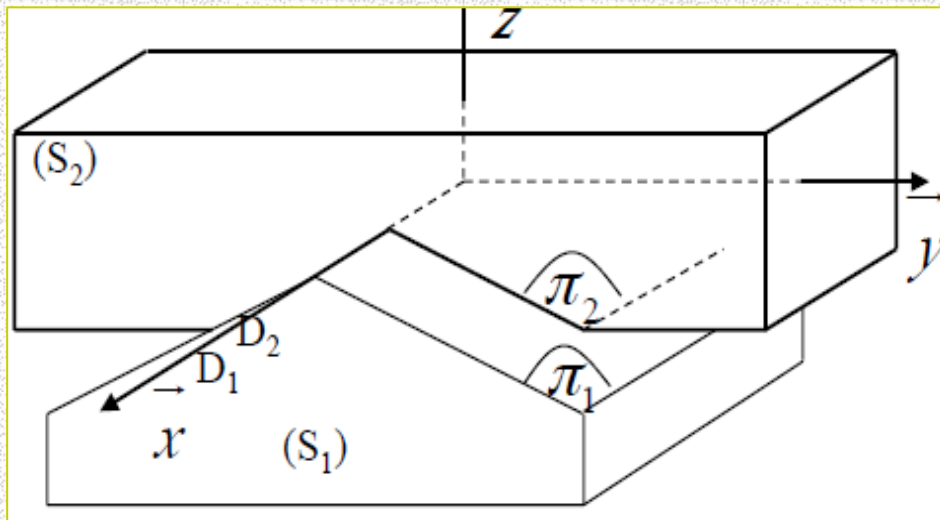


$$\mathcal{F} = \begin{Bmatrix} \mathcal{R}_x & \mathcal{M}_x \\ \mathcal{R}_y & \mathcal{M}_y \\ \mathcal{R}_z & \mathcal{M}_z \end{Bmatrix}_A \mathcal{R}$$

Bilan : 0 translation et 0 rotation $\Rightarrow$ 0 DDL

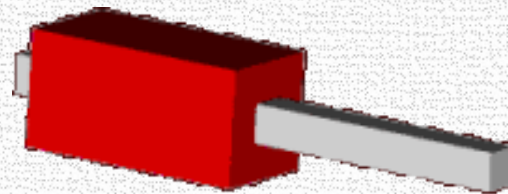
Liaisons mécaniques $\leftrightarrow$ contraintes

liaison glissière



Un plan π_1 de (S_1) reste confondu avec un plan π_2 de (S_2) et une droite D_2 liée à (S_2) et située dans π_2 reste confondue avec une droite D_1 liée à (S_1) et située dans π_1 .

Le mouvement de $(S_2)/(S_1)$ est Une translation d'axe $(O, \vec{x})$.



Liaisons :

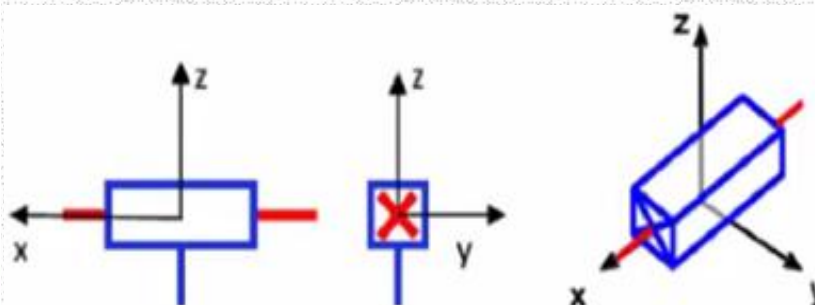
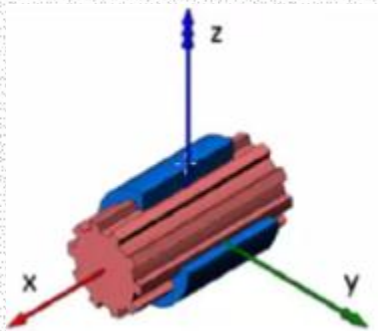
$$T_y = 0$$

$$T_z = 0$$

$$R_x = 0$$

$$R_y = 0$$

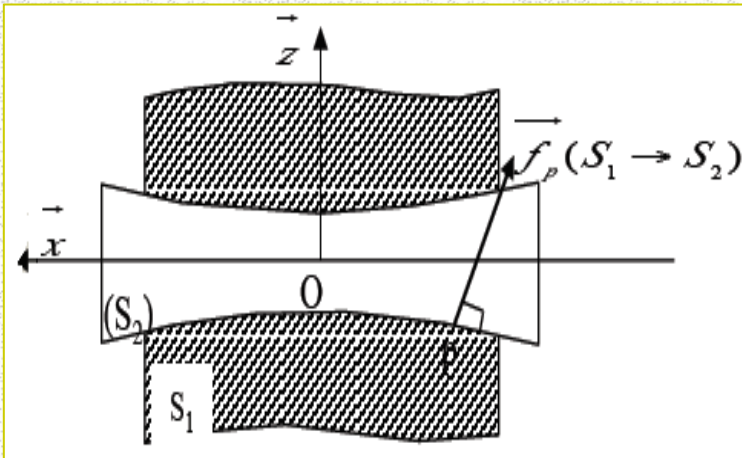
$$R_z = 0$$



$$\mathcal{F} = \begin{Bmatrix} 0 & \mathcal{M}_x \\ \mathcal{R}_y & \mathcal{M}_y \\ \mathcal{R}_z & \mathcal{M}_z \end{Bmatrix}_A \mathcal{R}$$

Bilan : une seule translation (ici autour de (OX) est permise) $\Rightarrow$ 1 DDL

Liaison hélicoïdale



Deux points A_2 et B_2 de (S_2) Distants d'une longueur L restent Confondus avec deux points A_1 et B_1 de (S_1) distants de la même longueur L

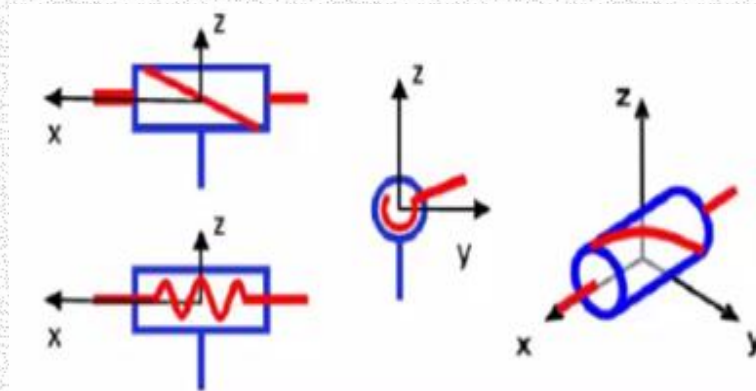
Liaisons :

$$T_y = 0$$

$$T_z = 0$$

$$R_y = 0$$

$$R_z = 0$$

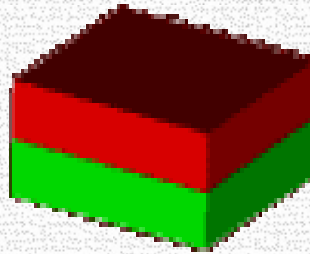
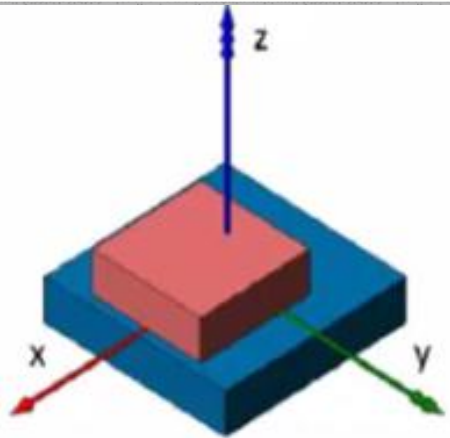


$$\mathcal{F} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{R}_y & \mathcal{M}_y \\ \mathcal{R}_z & \mathcal{M}_z \end{Bmatrix}_A \mathcal{R}$$

Bilan : 1 translation et 1 rotation qui sont liées $\Rightarrow$ 1 DDL

Liaison apui plan

- ✱ Possibilité de mouvement en translation suivant $(O, \vec{X})$;
- ✱ Possibilité de mouvement en translation suivant $(O, \vec{Y})$;
- ✱ Possibilité de mouvement en rotation autour de $(O, \vec{Z})$

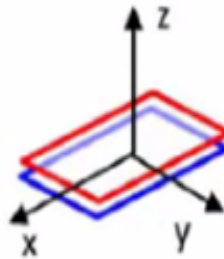
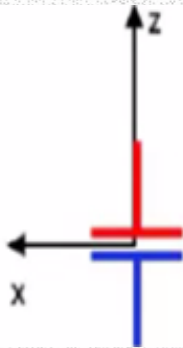


Liaisons :

$$T_z = 0$$

$$R_x = 0$$

$$R_y = 0$$

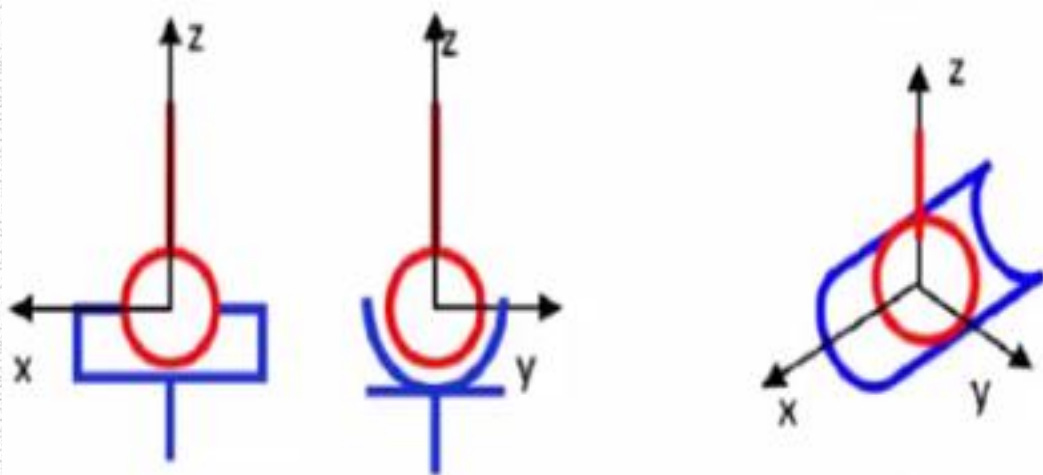
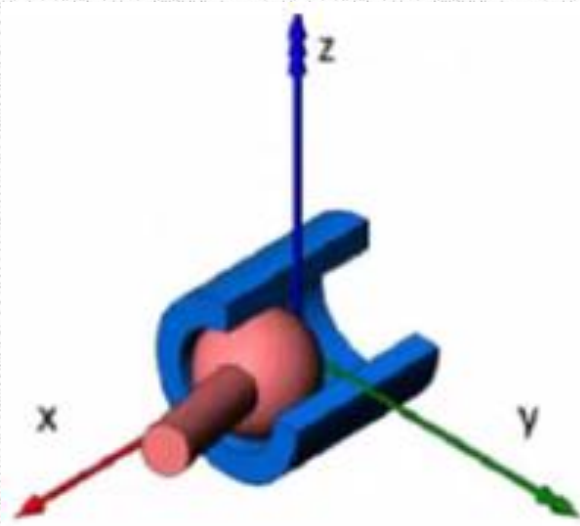


$$\mathcal{F} = \begin{Bmatrix} 0 & \mathcal{M}_x \\ 0 & \mathcal{M}_y \\ \mathcal{R}_z & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}}$$

Bilan : 2 translation et 1 rotation $\Rightarrow$ 3 DDL



Liaison linéaire annulaire



Liaisons :

$$T_y = 0$$

$$T_z = 0$$

$$\mathcal{F} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{R}_y & 0 \\ \mathcal{R}_z & 0 \end{Bmatrix}_A \mathcal{R}$$

Bilan : 1 translation et 3 rotations autour de $(O, \vec{X})$, $(O, \vec{Y})$ et $(O, \vec{Z})$: $\Rightarrow$ 4 DDL

FIN DE LA PARTIE I DU CHAPITRE 1

MERCI DE VOTRE ATTENTION

Questions

