Introduction

La **“ mécanique analytique ”** ou **“ mécanique classique ”** est une théorie physique fondamentale qui permet de décrire le mouvement des “ corps ” lorsqu'ils interagissent entre eux (particules, corps solides, ondes électromagnétiques, fluides, milieux continus), valable de l'échelle des molécules à l'échelle des planètes. Cette théorie a été développée principalement par:

1- Newton (1684): formulation en terme de forces.

2- Lagrange (1787) et **Hamilton** (1827): formulation variationnelle, c'est-à-dire que le mouvement effectué est celui qui optimise une certaine “ action ” (comme le chemin le plus court entre deux point). C'est une formulation aussi très géométrique qui permet de comprendre et résoudre des problèmes plus compliqués.

3- Einstein (“ théorie relativiste ” 1905 - 1917): modification de la théorie précédente, en “ unifiant“ l'espace et le temps, et en fournissant une expression géométrique de la gravitation.

Le formalisme mathématique de la mécanique rationnelle développe par Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) dans un corpus scientifique considérable, notamment sa mécanique analytique (1788), a conduit à une généralisation des principes de la mécanique newtonienne à des systèmes dynamiques plus élaborés (que celui du simple point matériel) où les mouvements sont sujets à des contraintes (un cauchemar avec les formulations “standard”). Le formalisme lagrangien que nous allons introduire tire son origine du principe des travaux virtuels (d'Alembert, Maupertuis) qui a recours à la notion de mouvements virtuels d'un système pour déterminer le mouvement réel de ce système. Dans le cas de systèmes soumis à des forces conservatives, les équations de Lagrange (équations du mouvement) sont dérivées d'une seule et unique fonction, le lagrangien **L**, sans avoir à prendre en considération les forces de liaisons (holonomes) souvent très complexes. D'où une simplification conceptuelle et pratique de la mise en équation des problèmes mécaniques. Ce formalisme est également géométrique car indépendant du choix d'un système de coordonnées (généralisées); d'où une extension naturelle au cas d'espaces de configuration très généraux (variétés différentiables). Nous émaillerons cette partie du cours de nombreux exemples illustratifs, notamment le problème des N corps, les pendules, certains systèmes à liaisons holonomes, le couplage minimal d'une particule chargée à un champ électromagnétique extérieur,... etc.

L'autre approche de la mécanique des systèmes que nous aborderons concerne le formalisme hamiltonien (Sir William Rowan Hamilton, 1805-1865) introduit dans une série de travaux, notamment dans son article “On a General Method in Dynamics" (1834). Alors que le formalisme lagrangien mettait en jeu une fonction **L** de l'espace tangent à l'espace de configuration du système (espace des couples position vitesse), le formalisme hamiltonien a également recours à une unique fonction, **H**, mais définie cette fois-ci sur l'espace cotangent à l'espace de configuration (espace des couples position-impulsion); cette fonction est l'hamiltonien du système et correspond à l'énergie ou générateur de l'évolution temporelle du système. Là encore, la théorie hamiltonienne admet des généralisations géométriques (variétés symplectiques, variétés de Poisson). Les méthodes modernes de quantification (décrivant le passage d'une description classique à une description quantique de l'univers physique) utilisent le formalisme hamiltonien de manière fondamentale.

Ces différents aspects de la mécanique analytique trouvent naturellement un champ d'application dans le chapitre important de la mécanique rationnelle que constitue la mécanique du solide (Euler, Poinsot, Lagrange, Kovalewski, ...etc.). Les mouvements du corps rigide (par exemple une toupie) sont très riches et leur étude subtile. Le fait que le corps solide ne présente pas, en général, de symétries particulières conduit à la notion importante d'opérateur d'inertie servant à décrire ses différents mouvements en présence ou non de forces extérieures. La configuration d'un solide sera, nous le verrons, déterminée par les éléments d'un groupe, le groupe euclidien SE(3), de l'espace euclidien tridimensionnel : la position d'un point origine du solide et l'orientation générale du solide par rapport à ce point.

L'étude des changements de référentiels (passage Laboratoire-Solide) paramètres par le temps est une étude obligée et riche d'enseignements (mécanique dans les systèmes non inertiels ; par exemple l'étude du pendule de Foucault, des ouragans et typhons, ...etc.). La dynamique d'un solide libre avec point fixe sera étudiée grâce aux théorèmes généraux de la mécanique et aussi dans le cadre hamiltonien (équations d'Euler). Le problème de la toupie avec un point fixe, plongée dans le champ de pesanteur, est associé au nom de Lagrange : l'étude de certains des mouvements de la toupie de Lagrange sera également abordée.

Bien qu'il s'agisse des formalismes datant, avec Lagrange et Hamilton, de la fin du XVIII^{ème} ou du XIX^{ème} siècle, elle est parfaitement adaptée aux approches modernes de la physique. Elle joue ainsi un rôle essentiel en mécanique statistique, elle est à l'origine de la quantification des dynamiques classiques, elle est fortement apparentée aux formulations modernes de la mécanique quantique en termes d'intégrales de chemin. Elle nous sera enfin d'une grande utilité pour reconstruire l'électromagnétisme à partir de la relativité.

Ce cours se compose de deux chapitres principaux. Dans le premier, qui sera le plus étoffé, nous donnons la formulation lagrangienne de la mécanique analytique. Nous insisterons sur la notion de coordonnée généralisée, qui permet de traiter de façon naturelle les contraintes et nous examinerons comment on peut incorporer dans le formalisme un certain nombre d'interactions. Un point important dans ce domaine sera l'établissement de la fonction de Lagrange pour des particules chargées en interaction avec un champ, dont nous montrerons qu'elle redonne bien la force de Lorentz. Enfin, nous déduirons d'un certain nombre de symétries fondamentales de la nature (invariance dans le temps, dans l'espace, invariance par rotation) les lois de conservation essentielles (énergie, impulsion, moment cinétique). Cette approche qui lie les lois de conservation aux propriétés de symétrie est en fait très générale et très puissante.

Le deuxième chapitre sera consacré à une brève revue du formalisme hamiltonien. Brève parce que le sujet est extrêmement vaste, en particulier en ce qui concerne les transformations canoniques et les liens avec la mécanique quantique.

Un des intérêts essentiels de la formulation hamiltonienne de la dynamique réside dans le rôle capital que joue ce formalisme dans la construction des grandes théories physiques telles que la mécanique quantique ou l'étude des interactions fondamentales. Dans la partie du cours consacrée à ce formalisme, on introduit les équations canoniques de Hamilton et la notion de transformation canonique. Les équations de la dynamique sont présentées en termes des crochets de Poisson.

Quelques applications sont envisagées. Enfin, on présente la méthode de résolution de Hamilton-Jacobi et on introduit la notion de système intégrable.